Rebena
Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem
v.1 (2021)

Contando um pouco da história da trigonometria

Telling a little about the history of trigonometry

Elinelson Gomes de Oliveira[1]

RESUMO

Este artigo tem como finalidade apresentar de um modo simples e objetivo como trabalhar a trigonometria no Ensino Fundamental, tendo a história desse tópico como recurso didático. Esse tema é de fundamental importância para o currículo do aluno do nesse nível de ensino, uma vez que o prepara para estudos posteriores e amplia a possibilidade de relacionar os conhecimentos matemáticos com o seu cotidiano. A história e os conceitos fundamentais da trigonometria foram escolhidos e trabalhados nas atividades aqui apresentadas em função do que é proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais no que se refere à pluralidade cultural. Metodologicamente, é feita uma fundamentação matemática, onde são apresentados teoremas, definições, propriedades e demonstrações de alguns elementos geométricos, tais como feixe de paralelas, segmentos proporcionais em duas transversais; além disso, semelhança de triângulos − os casos de semelhança e a trigonometria no triângulo retângulo. Espera-se que este artigo possa colaborar para incentivar jovens a seguir o caminho do desenvolvimento pleno da matemática e que possa empregar todo o seu poder em busca de novos conhecimentos e saberes. .

Palavras-chave: Ensino fundamental, História da Matemática. Trigonometria.

ABSTRACT

This article aims to present, in a simple and objective way, how to work trigonometry in Elementary School, having the history of this topic as a didactic resource. This theme is of fundamental importance for the curriculum of students at this level of education, as it prepares them for further studies and expands the possibility of relating mathematical knowledge to their daily lives. The history and fundamental concepts of trigonometry were chosen and worked on in the activities presented here according to what is proposed in the National Curriculum Parameters with regard to cultural plurality. Methodologically, a mathematical foundation is made, where theorems, definitions, properties and demonstrations of some geometric elements are presented, such as a bundle of parallels, proportional segments in two transversals; in addition, similarity of triangles - the cases of similarity and trigonometry in the right triangle. It is hoped that this article can collaborate to encourage young people to follow the path of full development of mathematics and that they can use all their power in search of new knowledge and knowledge. .

Keywords: Elementary school, History of Mathematics. Trigonometry.

1. INTRODUÇÃO

Pretende-se mostrar neste artigo, alguns aspectos da estreita relação entre a astronomia e a origem da trigonometria. É com esse objetivo, que serão

[1] Instituto Federal de Alagoas, Campus Rio Largo. elinelson.oliveira@ifal.edu.br

apresentados alguns fragmentos biográficos de alguns personagens dessa história: Tales de Mileto, Pitágoras, Aristarco de Samos, Erastóstenes, Hiparco (considerado o pai da trigonometria) e, finalmente, Ptolomeu. Antes de apresentar esses fragmentos biográficos, serão apresentadas algumas considerações sobre astronomia em virtude de suas íntimas conexões com a origem histórica da trigonometria.

Como ressalta Nogueira (2009), o nascimento da ciência se encontra estreitamente ligada à astronomia:

> O estudo dos astros – ou seja, a astronomia – foi a atividade que abriu as portas da ciência para os seres humanos. No firmamento, os primeiros homens e mulheres, ainda na pré-história, perceberam a existência de mecanismos e ciclos específicos que se refletiam em suas atividades terrenas e eram marcados pela posição das estrelas. (NOGUEIRA; 2009 p. 17).

Ainda segundo Nogueira (2009), a astronomia colocada na base da ciência influenciou os mais diversos campos do conhecimento científico. Porém, ao longo do tempo com a fragmentação do saber em disciplinas, as noções básicas de astronomia, também ficaram fragmentadas. E é fácil perceber as consequências disso, pois as primeiras noções sobre o Sistema Solar são vistas pelos alunos em Geografia, as leis dos movimentos planetários em Física e as novas descobertas sobre a origem do universo, o aluno da educação básica não vê em lugar algum. Desse modo, pode-se perguntar o que instigou a tantas pessoas do mundo em diferentes épocas consideradas as mais inteligentes, a desenvolver todo esse conhecimento?

Nossos alunos, na maioria das vezes são desmotivados porque a eles são transferidos enormes quantidades de conhecimentos, falando-se pouco ou nada do que motivou tudo aquilo. Os PCN ressaltam a necessidade de um ensino da matemática que busque a superação dessa fragmentação:

> Assim tanto a História da Matemática como os estudos da Etnomatemática são importantes para explicar a dinâmica da produção desse conhecimento, histórica e socialmente. Desse modo, é possível visualizar melhor a dimensão da História da Matemática no currículo da escola fundamental como um campo de problemas para construção e evolução dos conceitos e como um elemento de integração da Matemática com o tema Pluralidade Cultural. (PCN, MATEMÁTICA; 1998. p. 33).

Nesse sentido, conhecer as motivações e as dificuldades enfrentadas por diferentes estudiosos para produzir e organizar esse conhecimento pode estimular os alunos no desenvolvimento e na ampliação do raciocínio relacionando ideias que aparentemente não têm ligação nenhuma.

2.TALES DE MILETO

De acordo com Boyer (2010) e Eves (2011), sobre a vida e obra Tales de Mileto (624 – 548 a.E.C.) sabe-se muito pouco. Acredita-se que ele, nasceu na cidade de Mileto na Ásia menor, atual Turquia, e faleceu na mesma cidade. Segundo a tradição parece que Tales iniciou sua vida como mercador. Sobre Tales, são contadas diversas estórias, uma delas, relata-se que ele monopolizou as prensas de azeite num ano em que a colheita de azeitonas foi abundante e que alugando-as em momento oportuno tornou-se muito rico.

Desse modo, pode dedicar-se aos estudos viajando aos grandes centros antigos de conhecimento, Egito e a Babilônia, onde pode adquirir conhecimentos sobre matemática e astronomia. Segundo Boyer (idem, p.34) e Eves (idem, p.95), no Egito aprendeu geometria e na Babilônia possivelmente esteve em contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Voltando para Mileto recebeu o nome de, estadista, filósofo, engenheiro, homem de negócio, matemático e astrônomo. Foi considerado o primeiro filósofo e um dos sete sábios da antiguidade.

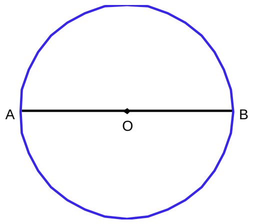
2.1. As realizações de Tales de que se tem notícia

Segundo o historiador Heródoto, Tales previu um eclipse solar que ocorreu no ano de 585 a.E.C., assombrando seus contemporâneos. Mas, segundo Eves (2011), não existem evidências historiográficas que respaldem essa afirmação. Para Nobre (2001), essa informação não deixa de ser intrigante, pois estudos astronômicos atuais confirmam que ocorreu um eclipse do Sol no dia 28 de maio do ano 585 a.E.C., no entanto historiadores da atualidade, tais como Neugebauer, puderam comprovar que Tales não teria base científica para fazer tal previsão. Pois era preciso que ele tivesse amplo conhecimento de conceitos geográficos, como o de latitude que seria indispensável para determinar a ocorrência de um eclipse. E de acordo com esses historiadores, caso ele tenha realmente feito tal previsão, isso não passou de um golpe de sorte.

Muitos autores representantes da historiografia tradicional, (EVES, 2011; BOYER, 2010), afirmam que Tales é o primeiro personagem ao qual lhes são atribuídas algumas descobertas matemáticas, sendo por esse motivo, considerado o primeiro matemático verdadeiro que deu origem a organização dedutiva da geometria. São a ele atribuídos, por esses autores, os seguintes resultados:

1. Um círculo é bissectado por seu diâmetro, conforme figura 1 abaixo.

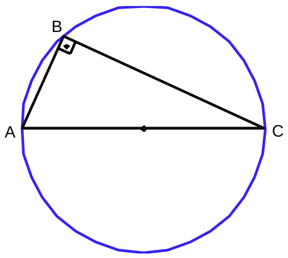
Figura 1 – Círculo bissectado por seu diâmetro



Fonte: Autor, 2014

2. O teorema segundo o qual um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto. Ver figura 2.

Figura 2 – Ângulo inscrito num semicírculo

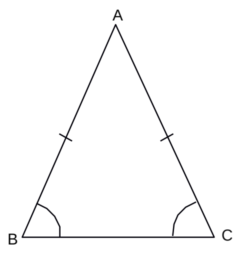


Fonte: Autor, 2014

Todo ângulo reto é inscritível numa semicircunferência e, reciprocamente, todo ângulo inscrito numa semicircunferência, com os lados passando pelas extremidades, é ângulo reto.

3. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Veja figura 3 a seguir.

Figuras 3 – Triângulo isósceles

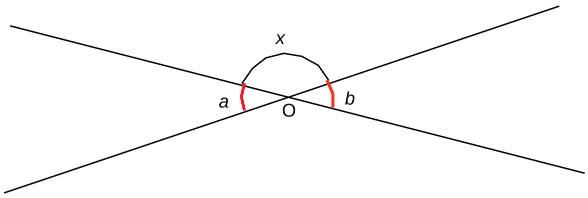


Fonte: Autor, 2014

Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.

4. Os pares de ângulos formados por duas retas concorrentes são congruentes. Conforme indicado na figura 4. (Esse resultado é conhecido como ângulos opostos pelo vértice)

Figura 4 – Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Autor, 2014

Demonstração:

Sabe-se que,

$$a + x = 180^\circ \quad \text{I}$$

$$b + x = 180^\circ \quad \text{II.}$$

Das igualdades I e II temos que,

$$a + x = b + x.$$

Cancelando-se x em ambos os membros da igualdade obtemos,

$$a = b.$$

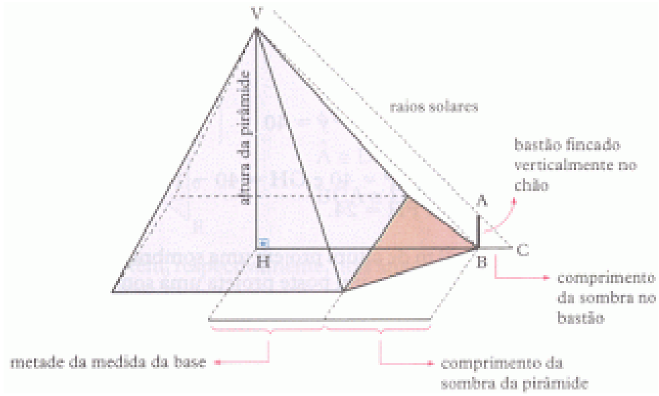
Portanto, os ângulos a e b, são congruentes.

De modo análogo mostra-se que os outros dois também são congruentes.

5. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são respectivamente congruentes a dois ângulos e um lado do outro, então, esses triângulos são congruentes.

Alguns autores da historiografia tradicional da matemática associam a figura de Tales com o cálculo da altura de uma pirâmide no Egito, como podemos ler em Eves (2011, p. 95): “Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra.” Contudo, vale notar, que esse autor não assegura a autenticidade desse fato quando inicia a frase com a palavra “diz-se”. (Veja a figura 5.)

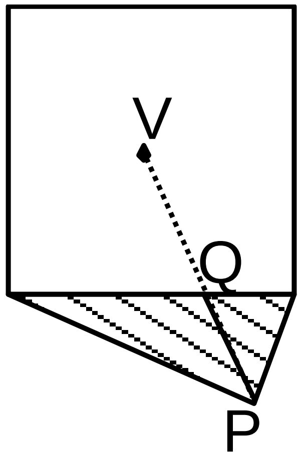
Figura 5 – Pirâmide



Fonte: Disponível em:<http://matematicaferafacitec.blogspot.com.br/2011/08/tales-de-mileto-piramide-e-o-teorema.html>. Acesso em 27.11.14

Recentemente, autores como Nobre (2001) que lidam com a história da matemática de uma maneira mais crítica, descartam a possibilidade de que Tales tenha realmente realizado essa façanha, alegando que a interpretação do feito de Tales de acordo com a figura 6 acontece raramente com tal exatidão. Pois, a sombra pode apresentar-se de modo que não possibilite a realização do cálculo sendo, portanto, impossível que ele tenha calculado tal altura. (Ver figura 6, que ilustra tal situação.)

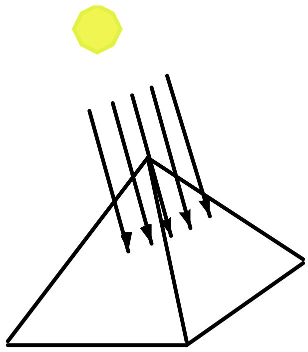
Figura 6 – Caso geral



Fonte: Autor, 2015

Ou ainda, os raios solares são incididos verticalmente sobre a pirâmide fazendo com que a esta não projete sua sombra no chão e sim sobre si mesma, ver figura 7.

Figura – 7 Sombra não projetada no chão



Fonte: Autor, 2015

Em vista de tudo isso, é natural que se conclua que a história não aconteceu do modo que foi contada ou então que Tales tenha tido um puro ato de sorte como no caso da predição do eclipse. Dentro desse contexto não se pode precisar sobre as verdadeiras contribuições de Tales a respeito desse tema.

3.PITÁGORAS

De acordo com a historiografia tradicional (BOYER, 2010; EVES, 2011), Pitágoras de Samos viveu por volta de 580-500 a.E.C.. Foi um profeta e místico nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso próxima de Mileto, lugar onde nasceu Tales. Foram escritas diversas biografias de Pitágoras na antiguidade, mas todas se perderam, inclusive uma escrita por Aristóteles. Atualmente a dificuldade encontrada para descrever a figura de Pitágoras advém do fato de que a ordem por ele fundada ter sido comunitária e também secreta. O que temos é uma biografia que está envolta em lendas e fatos não comprovados. Na verdade, não é fácil fazer distinção entre história e lenda a respeito de Pitágoras, pois, para o povo, ele representava muitas coisas tais como, filósofo, matemático, astrônomo, santo, milagreiro, profeta, charlatão e mágico, tornando-se um personagem muito influente da história, uma vez que, iludidos ou inspirados seus seguidores disseminaram seus ensinamentos e crenças pelo mundo grego.

Talvez pela semelhança entre seus interesses, alguns relatos afirmam que Pitágoras poderia ter sido discípulo de Tales, o que, segundo Boyer (2010), é pouco provável dada uma diferença de aproximadamente 50 anos entre suas idades. Pitágoras era um filósofo e místico, e Tales era homem de negócio. A semelhança dos interesses entre eles, era devida ao fato de Pitágoras também ter viajado pela Babilônia e Egito, onde adquiriu conhecimentos sobre matemática, astronomia e também de ideias religiosas. No século em que nasceu Pitágoras, surgiram também grandes condutores de povos e criadores de religião tais como Gautama Buda, Zaratustra (Zoroastro), Confúcio e Lao Tsé, sendo este século considerado crítico no que diz respeito ao desenvolvimento da religião e também da matemática.

Segundo Eves (2011), quando voltou para Samos, Pitágoras encontrou a ilha governada pelo ditador Polícrates e a Jônia dominada pelos Persas. Então Pitágoras partiu para Crotona, uma colônia grega no sul da Itália, onde fundou sua sociedade secreta conhecida como Escola Pitagórica cujo lema era “Tudo é número” e que além de ser um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências da naturais, era onde realizavam cerimônias e ritos secretos. Pitágoras conseguiu, dessa forma, criar uma sociedade religiosa, filosófica e política. Os discípulos formados ocupavam os melhores cargos no governo consciente de seus conhecimentos desprezavam as pessoas ignorantes e apoiavam os aristocratas. Revoltadas as pessoas destruíram e incendiaram os prédios da escola. Pitágoras fugiu e exilou-se em Metaponto, ao norte na Lucânia onde presume-se que tenha morrido em torno de 500 a.E.C. com idade entre 75 e 80 anos.

3.1. As contribuições dos pitagóricos

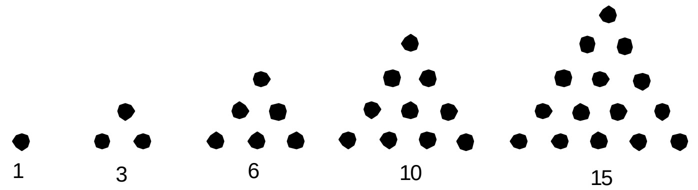
De acordo com Boyer (2010) e Eves (2011), na ordem fundada por Pitágoras, o conhecimento adquirido e as descobertas eram comuns, ou seja, não eram atribuídos a nenhum membro específico, de modo que não se pode falar ao certo sobre a obra de Pitágoras. Ao invés disso, ressaltam esses autores, é preferível se referir às contribuições dos pitagóricos, apesar de na antiguidade ter-se o costume de atribuir o mérito das descobertas ao mestre.

Ainda que muitos não considerem completamente que Pitágoras tenha dado alguma contribuição a essa ciência, é fato que os pitagóricos exerceram um importante papel na história da matemática, pois os elementos de aritmética e geometria no Egito e na Mesopotâmia eram basicamente aplicações de exercícios numéricos particulares, havendo pouca estrutura intelectual, e possivelmente nada que caracterizasse uma abordagem filosófica de princípios, ao que parece foi Tales quem fez algum progresso nesse sentido. Entretanto, a história tradicional, sustenta o posicionamento de Eudemo e Proclus de que foram os pitagóricos que deram nova ênfase a matemática, pois esta relacionava-se mais com o amor à sabedoria do que a qualquer outra coisa. Em tempo algum a matemática desempenhou papel tão expressivo na vida e na religião, do que entre os pitagóricos.

É atribuído aos pitagóricos ter descoberto propriedades interessantes dos números que eram chamados por eles de números figurados vejamos dois exemplos:

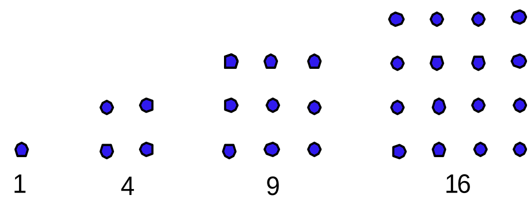
Números triangulares,

Figura 08 – Números triangulares



Fonte: Autor, 2014

Figura 09 – Números quadrados



Fonte: Autor, 2014

São atribuídos também aos pitagóricos os números perfeitos, deficientes e abundantes que associam-se de forma mística que é essencial para enfatizar fatos numerológicos. Um número se diz perfeito quando é igual à soma de seus divisores próprios, deficiente quando excede a soma de seus divisores próprios e abundante quando é menor que a soma de seus divisores próprios. Desse modo, Deus criou o mundo em seis dias, que é um número perfeito vejamos que, $1 + 2 + 3 = 6$. Em contra partida, de acordo com a observação de Alcuíno (735-804) toda a raça humana descende das oito almas da arca de Noé, sendo essa criação imperfeita porque 8 é deficiente, já que $1 + 2 + 4 < 8$.

3.2. O teorema que é atribuído a Pitágoras

Esse teorema diz que em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Não se conhece nenhuma prova desse teorema que tenha sido dada por algum pitagórico e é pouco provável que ela exista. O teorema de Pitágoras pertence ao contexto dos números figurados relacionados ao que se conhece hoje como ternos pitagóricos, problema de se encontrar dois números quadrados cuja soma também seja um número quadrado e não deveria ser, portanto, um resultado geométrico.

Sabe-se ainda que a civilização mesopotâmica que começou por volta de 3500 a.E.C., certamente a mais antiga do mundo, na Mesopotâmia atual Iraque, criou um meio de escrita chamada cuneiforme e deixou registrados em tabletes de argila muitos problemas matemáticos com suas respectivas soluções. Num desses tabletes de cerca de 1800 a.E.C conhecido como tábula de Plimpton 322, (o nome deve-se a George Arthur Plimptonque colecionava itens raros e essa tábula era o item 322 de sua coleção), encontra-se o registro mais antigo sobre o teorema de Pitágoras, ela contém uma tabela de ternos pitagóricos. Veja figura 10 abaixo.

Figura 10 - Tábula de Plimpton 322

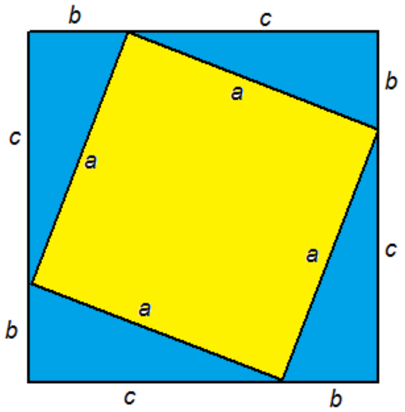
Fonte: Disponível em:<http://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/>. Acesso em 21.01.2015

Esse fato nos mostra que o teorema que recebe o nome de Pitágoras já era conhecido pelos babilônicos, cerca de mil anos antes de Pitágoras. De acordo com Eves (2011): "Desde os tempos de Pitágoras, muitas demonstrações do teorema em consideração foram dadas. E. S. Loomis, na segunda edição de seu livro, *The Pythagorean Proposition*, coletou e classificou nada menos do que 370 dessas demonstrações."

Demonstração: A prova pela área do quadrado

Considere a figura 11 seguinte que mostra um quadrado cujo lado mede *b* + *c* circunscrito a outro quadrado cujo lado mede *c*. Observe que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quatro triângulos com a do quadrado menor.

Figura 11 – Quadrado



Fonte: Autor, 2014

Daí, temos:

$$(b+c)^2 = a^2 + 4.\frac{1}{2}bc$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc.$$

Cancelando-se *2bc* em ambos os lados obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Que é o que diz o suposto Teorema de Pitágoras.

Considera-se ter sido os pitagóricos os primeiros a acreditarem poder utilizar a matemática para entender as leis da natureza. E Proclus atribui a Pitágoras a construção dos sólidos regulares e a teoria das proporcionais, sabe-se que essa afirmação está de acordo com o pensamento pitagórico e que na Mesopotâmia ele teve contato com as médias, aritmética, geométrica, harmônica e a razão áurea.

O símbolo utilizado pela sua escola era o pentagrama, que Pitágoras descobrira possuir propriedades bem interessantes. Tal pentagrama era obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular, pelas intersecções dessas diagonais, obtém-se um novo pentágono regular proporcional ao primeiro pela razão áurea. A esse respeito Johannes Kepler (1571-1630) escreveu:

> A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar joia preciosa. (KEPLER *apud* BOYER, 2010, p. 37)

3.4. A incomensurabilidade

Existem muitas lendas a respeito da descoberta da incomensurabilidade de dois segmentos.

> A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. [...] Pois não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. (EVES, 2011, p.106, 107)

Segundo Eves (2011), particularmente, essa descoberta teria causado um escândalo no meio pitagórico e, de acordo com uma lenda, levado um dos pitagóricos a ser perseguido e, se não morto, dado como morto.

Mas atualmente historiadores influentes têm discordado muito da história tradicional. De acordo com Roque (2012), nas últimas décadas esses mitos têm sido muito questionados pela história da Matemática. Segundo Roque (idem, pag. 74-75), alguns autores não só duvidam que os segmentos incomensuráveis tenham sido descobertos pelos pitagóricos, como também acreditam que não é certa nem mesmo a relação entre o Teorema de Pitágoras e a descoberta dos irracionais. Sabendo que os babilônios e chineses já conheciam o teorema e, no entanto não, chegaram a essa conclusão.

4. ARISTARCO

De acordo com Boyer (2010) e Eves (2011), Aristarco de Samos por volta de (310 - 230 a.E.C). Foi um astrônomo e matemático, que segundo Arquimedes e Plutarco fez uma das conjecturas astronômicas mais ousadas da antiguidade, por volta do século III a. E.C. na qual apresentava a Terra em movimento ao redor do Sol. Sendo o primeiro a propor que o nosso Sistema Solar era heliocêntrico e não geocêntrico. Tudo o que foi escrito por ele a respeito desse assunto se perdeu, com a destruição da Biblioteca de

Alexandria, Suas ideias, só ficaram conhecidas porque foram citadas por Arquimedes no seu *Psammites*. Sua teoria heliocêntrica só teria reconhecimento e validade mais de um milênio e meio depois com Nicolau Copérnico.

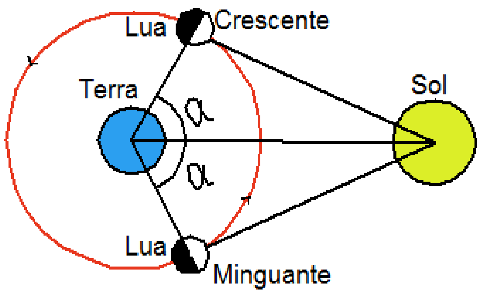
4.1. Contribuições de Aristarco

Segundo (BOYER, 2010; ÁVILA, 2002) Apenas uma das obras de Aristarco chegou até nós, *Sobre os tamanhos e distância entre o Sol e a Lua* escrita talvez por volta de 260 a.E.C. Nela, Aristarco usa uma geometria elegante e muito simples para medir a distância Terra-Sol e Terra-Lua. Ele concluiu que o Sol estava a cerca de 20 vezes mais distante da Terra que a Lua. Atualmente, sabemos que essa distância é cerca de 400 vezes. Apesar do resultado o procedimento de Aristarco estava correto, os instrumentos para medição de ângulos da época é que não davam uma medida precisa. O que nos leva refletir em todo conhecimento que foi perdido ao longo do tempo. Atualmente sabe-se que em sua homenagem deram seu nome a uma cratera lunar.

Vejamos como ele procedeu para calcular as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua.

Ele sabia que existia duas posições da Lua em sua órbita que para um observador terrestre apresentava uma metade iluminada e a outra escura, que conhecemos como quarto crescente e quarto minguante. (Veja a figura 12.)

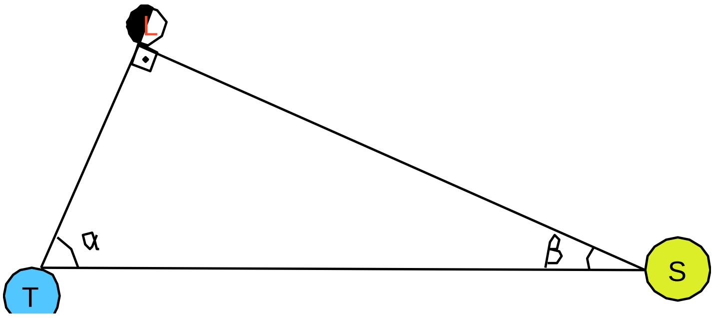
Figura 12 – Esquema Terra, Lua e Sol



Fonte: Autor, 2014

Quando isso ocorre tem-se o triângulo retângulo Terra-Lua-Sol, com a Lua no vértice do ângulo reto (veja a figura 13).

Figura 13 – Triângulo retângulo, Terra-Lua-Sol



Fonte: Autor, 2014

Aristarco mediu o ângulo $\alpha = L\hat{T}S$ encontrando o valor 87° logo, o ângulo $\beta = L\hat{S}T$ teria medida igual a 3°. O que ele precisava saber agora era o valor da razão TS/TL,que ele sabia ser a mesma para todos os triângulos semelhantes a ele. Uma maneira de se determinar essa razão é observar que:

$$\frac{TL}{TS} = cos\alpha.$$

Como $cos\alpha = cos87° \neq 0$, essa igualdade é equivalente a

$$\frac{TS}{TL} = \frac{1}{cos\alpha}.$$

Consultando uma tabela de razões trigonométricas temos que, $cos87° = 0{,}052$, daí temos

$$\frac{TS}{TL} = \frac{1}{0{,}052} = 19{,}23.$$

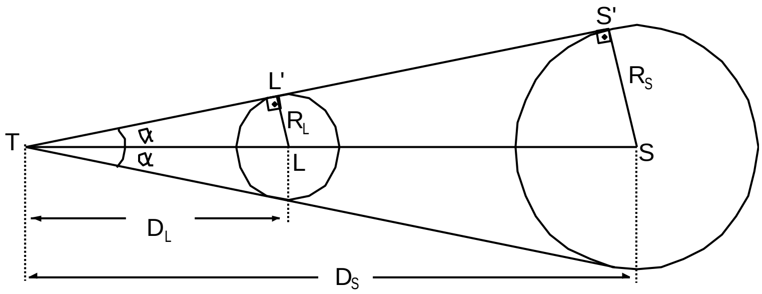
Chegando, portanto, a conclusão de Aristarco de que o Sol está cerca de 20 vezes mais distante da Terra que a Lua.

Com base na sombra projetada pela Terra num eclipse lunar, chegou a conclusão de que a Lua tem diâmetro três vezes menor do que o da Terra, tendo este valor em vista deduziu que o diâmetro do Sol é 20 vezes maior do que o da Lua e cerca de 7 vezes maior que o da terra. Hoje sabemos que o diâmetro da Lua é aproximadamente 3,75 menores que o da Terra e que o diâmetro da Terra é aproximadamente 0,00916 do diâmetro do Sol,não chegando, portanto,nem a um centésimo do diâmetro dele.

Como Aristarco fez para chegar a essas conclusões? Ele observou que o ângulo sob o qual ele via a Lua era o mesmo sob o qual ele via o Sol, determinando dessa forma que a Lua e o Sol tem o mesmo tamanho angular

2α. Fato este, que pode ser comprovado num eclipse solar, no qual o Sol fica totalmente encoberto pela Lua. Veja a figura 14 que ilustra este fato.

Figura 14 – Eclipse solar



Fonte: Autor, 2014

Com os recursos que ele tinha na época estimou que o ângulo 2α media 2°, hoje sabemos que na verdade, ele mede cerca de 0,5°. Mas, esse fato não interfere no resultado que vamos obter considere os triângulos TLL' e TSS' temos que:

$$sen\alpha = \frac{R_L}{D_L} = \frac{R_S}{D_S}.$$

Daí, temos que

$$\frac{D_S}{D_L} = \frac{R_S}{R_L},$$

Aristarco sabia que,

$$\frac{D_S}{D_L} = \frac{TS}{TL} \cong 20.$$

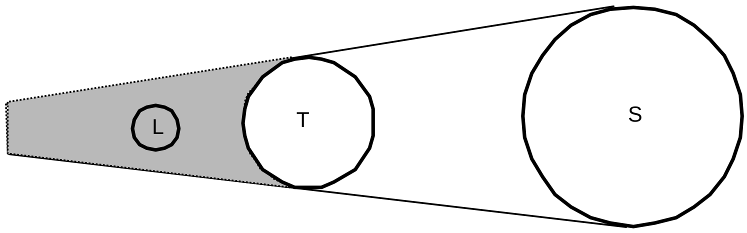
Logo se tem,

$$\frac{R_S}{R_L} \cong 20 \Longrightarrow R_S \cong 20R_L.$$

Portanto, para Aristarco o raio do Sol era cerca de vinte vezes o raio da Lua.

Relacionando as distâncias e raios da Lua e do Sol com o raio da Terra para fazer tais relações, Aristarco, observou o que acontece num eclipse lunar, que é quando a Lua atravessa o cone da sombra da Terra, veja figura 15 abaixo.

Figura 15 – Eclipse lunar

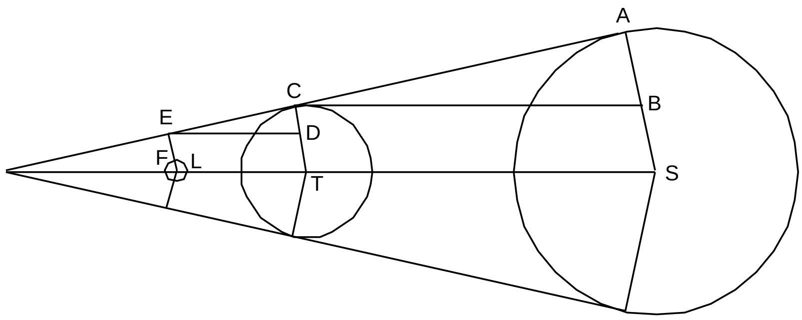


Fonte: Autor, 2014

Com base no tempo que a Lua gastou para atravessar a sombra, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, na altura da Lua, era 8/3 do diâmetro da Lua.

Consideremos agora a figura 16 a seguir:

Figura 16 – Triângulos semelhantes



Fonte: Autor, 2014

Nela os pontos L, T eS, são respectivamente os centros da Lua, da Terra e do Sol. E seus respectivos raios são os segmentos cujas medidas são dadas por$LF = R_L$,$TC = R_T$ e $SA = R_S$, o segmento que mede LE é o raio do cone de sombra na altura da Lua, de modo que $LE = 8/3R_L$. Veja que os triângulos CDE e ABC são semelhante daí temos que

$$\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Longrightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AB}{BC}. \qquad (i)$$

Observe ainda que

$$CD = TC - TD = R_T - LE \Rightarrow CD = R_T - 8/3R_L\,;$$

$$AB = SA - SB \Rightarrow AB = R_S - R_T;$$

$$DE = TL \Longrightarrow DE = D_L \text{e} BC = TS \Rightarrow BC = D_S.$$

Substituindo-se os valores obtidos em (i) obtemos

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}. \qquad (ii)$$

Lembrado que

$$sen\alpha = \frac{R_L}{D_L} = \frac{R_S}{D_S} = a \qquad e \qquad \frac{D_S}{D_L} = \frac{TS}{TL} = b.$$

Teremos

$$D_S = bD_L, \qquad R_S = aD_S = abD_L, \quad R_L = aD_L$$

de modo que a igualdade (ii) pode ser escrita como

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}aD_L}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}$$

daí temos

$$R_T + \frac{R_T}{b} = \frac{8}{3}aD_L + aD_{L.}$$

Simplificando

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)R_T = \frac{11}{3}aD_L$$

donde segue que

$$D_L = \frac{3(b+1)}{11ab}R_T$$

portanto, temos

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)}{11a}R_T,$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)}{11}R_T$$

e

$$R_L = aD_L = \frac{3(b+1)}{11b}R_T.$$

Utilizando os dados de Aristarco substituindo-se agora $a = sen\,1° \cong 0{,}017$e $b \cong 20$, vamos obter as grandezas D_L , D_S, R_L e R_S em função do raio da terra R_T.

$$D_L \cong 16{,}8R_T,\ D_S \cong 337R_T, \quad R_L \cong 0{,}29R_T, \quad R_S \cong 5{,}7R_T.$$

Fazendo as contas com os valores mais aproximados da realidade $a = sen\,0{,}25° \cong 0{,}0044$ e $b \cong 400$, obtemos;

$$D_L \cong 62R_T,\ D_S \cong 24855R_T,\quad R_L \cong 0{,}27R_T,\quad R_S \cong 109R_T.$$

Que são, portanto, valores mais próximos dos encontrados atualmente.

5. ERATÓSTENES

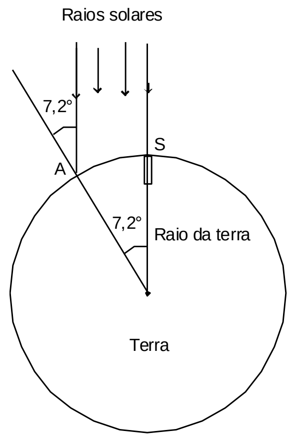
(BOYER, 2010; EVES, 2011; RPM 62) Erastóstenes, nasceu em Cirene ao norte da África atual Líbia por volta de 276 a.E.C., foi poeta, matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, filosofo, atleta e bibliotecário. Estudou em Alexandria, no Egito e em Atenas onde passou a maior parte de sua juventude. Foi também em Atenas, que Eratóstenes adquiriu grande fama pela diversidade de seus conhecimentos. Atendendo ao chamado do rei Ptolomeu III, mudou-se para Alexandria com o encargo de administrar a Biblioteca e ser tutor de seu filho o futuro rei Ptolomeu Filopator. Foi no reinado de Ptolomeu III no período 246 a.E.C. a 222 a.C. E., e sob o comando de Erastóstenes que que a Biblioteca obteve um grade crescimento, chegando a obter 480 000 obras. Acredita-se que a Biblioteca tenha chegado a obter cerca de 700 000 obras. Depois de muitos ataques dentre eles um incêndio no tempo de Júlio César e com o declínio de Alexandria como centro de conhecimento e atividade intelectual que perdurou cerca de sete séculos. Finalmente, a Biblioteca foi destruída com a invasão dos árabes no século VII E.C.

5.1. **Contribuições de Erastóstenes**

De acordo com Boyer (2010) e Ávila (2002, 2004, 2007), as obras matemáticas de Eratóstenes perderam-se, não chegando até nós. Sabe-se que ele ficou conhecido por ter sido o primeiro na história da ciência a determinar o tamanho da terra. Ele chegou a tal conclusão usando um método engenhoso e muito simples. Ele sabia que no primeiro dia de verão, na cidade de Syene (ou Assuã) no Egito, ao meio dia a luz do sol incidia verticalmente no fundo de um poço mostrando dessa forma que o sol estava diretamente acima da cidade. E usando cálculos simples mostrou que em Alexandria o ângulo que a luz do sol fazia com uma vara colocada na vertical era de 7,2°, o que corresponde a 1/50 da circunferência que mede 360°. Viajava-se muito de Syene para Alexandria e sabia-se que a distância entre essas cidades era de 5 000 estádios. Utilizando esses dados Eratóstenes, calculou que a terra tinha 50 x 5000 = 250 000 estádios, (Segundo a *Royal Geographical Society of London*, um estádio vale 203 jardas inglesas, ou 185,6 metros. Foi adotada a aproximação de 185 metros). Portanto, o encontrado por ele equivale atualmente a aproximadamente 46 250 km. O que é bastante razoável sabendo que era muito difícil para Erastóstenes medir com a tecnologia que tinha na época a distância entre dois pontos sobre a superfície da terra. O valor atual pela linha do equador é de aproximadamente 40 053,84 km.

Vamos entender matematicamente como fez Eratóstenes para calcular o comprimento da terra. (Ver figura 17.)

Figura 17 – Raios solares incidindo verticalmente num poço em Syene



Fonte: Autor, 2014

Usando uma regra de três simples pelo fato da proporcionalidade entre arcos e ângulos obtemos,

$$\frac{C}{\widehat{AS}} = \frac{360°}{7,2°},$$

onde, C é o comprimento da circunferência da Terra, daí tem-se

$$\frac{C}{5000} = 50.$$

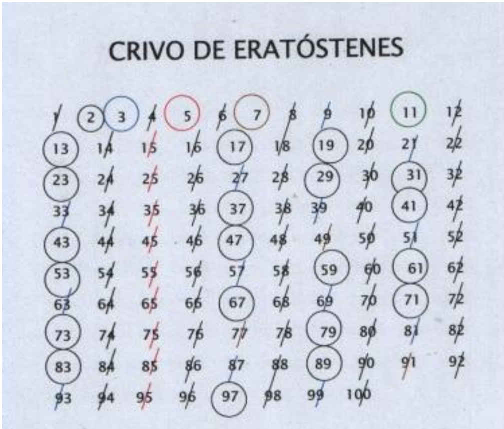
E como 1 estádio equivale a 185 m, conclui-se que,

$$C = 250\ 000 \text{ estádios} \cong 250\ 000 \,.\, 185 \cong 46\ 250\ 000 \text{ metros.}$$

Portanto, o comprimento da circunferência da terra é aproximadamente $46\ 250$ km.

Eratóstenes é bem conhecido dos matemáticos pois adquiriu grande fama em aritmética graças a um procedimento de listar os números primos até o limite desejado. Tal método é conhecido como Crivo de Eratóstenes. Aplica-se o método da seguinte forma: com os números dispostos em ordem de 1 até n, cancela-se o 1, em seguida a partir do 2 (exclusive) cancelam –se os números de dois em dois, agora a partir do 3 (exclusive) cancelam-se os números de três em três e continua-se desse modo até cancelar cada n-ésimo número a partir de n (exclusive). De acordo com a figura 18 abaixo.

Figura 18 – Crivo de Eratóstenes



Fonte: Disponível em: <https://erealityhome.wordpress.com/2009/03/21/250-ac-crivo-de-eratostenes-p-numeros-primos-2/>. Acesso em 21.01.2015

Mesmo com tanto sucesso como estudioso e intelectual o fim de Eratóstenes foi trágico. Relata-se que em torno 194 a. E.C. com a idade avançada ele ficou quase cego em decorrência de uma oftalmia, com desgosto, induziu sua própria morte parando de alimentar-se.

Na revista Cálculo, edição 39 de abril de 2014, num artigo cujo título é *Duas cidades duas turmas e a circunferência da Terra.* Duas turmas de 9º ano uma do Colégio Vital Brazil, em São Paulo com 40 alunos e outra da Escola municipal Pará, no Rio de Janeiro com 38 alunos. Reuniram-se em um dia de sol para refazer o que deixou o astrônomo grego Eratóstenes famoso. Os professores Ayrton Olivares e Juliana Jong, do Colégio Vital Brazil, e a professora Cláudia Moura, da Escola Municipal Pará foram convidados pela revista Cálculo para realizar essa tarefa.

Então no dia 21 de fevereiro, às 11 horas da manhã a professora Cláudia no Rio, reuniu sua turma munidos de trena, cabo de vassoura, régua, transferidor, esquadro, celular e calculadora, daí eles utilizaram a bússola do celular para encontrar e marcar uma linha até um ponto X na direção do norte magnético em seguida a professora utilizou o transferidor e adicionou alguns graus ao ponto X a fim de determinar o norte verdadeiro, em seguida traçaram uma outra linha indicando o meridiano local. Ao mesmo tempo em São Paulo Ayrton e Juliana reuniram os alunos na quadra de esportes da escola e lá realizaram os mesmos procedimentos que a turma do Rio.

Com tudo pronto, ambas as turmas ficaram esperando o sol chegar ao ponto mais alto de onde estavam o meio dia, momento aproximado em que a sombra do cabo de vassoura chegaria no meridiano o que ocorreu às 12:00 h no Rio, então Cláudia enviou uma mensagem de celular para a turma de São Paulo dizendo “Chegou”. A partir daí ela usa o transferidor para determinar o ângulo formado pelo cabo e os raios solares. E às 12:07, em são Paulo, eles mediram o comprimento da sombra, a partir daí eles trocaram as informações via mensagens:

Rio de Janeiro, comprimento do cabo 1,69 m e da sombra 28,5 cm

São Paulo, comprimento do cabo 1,18 m e da sombra 30 cm.

Cada turma em suas salas fizeram as contas e concluíram que a circunferência da Terra era de aproximadamente 28000 km bem longe dos 40075 km. O que deu errado? Depois de revisar e pensar, chegaram a conclusão de que a Terra gira e isso influenciou nos comprimentos das sombras, além disso, perceberam que a soma dos ângulos internos do triângulo encontrado era maior que 180°. Então os professores chegaram a conclusão que para se ter uma boa estimativa as turmas precisavam de medidas que os levassem a um ângulo de aproximadamente 3°.

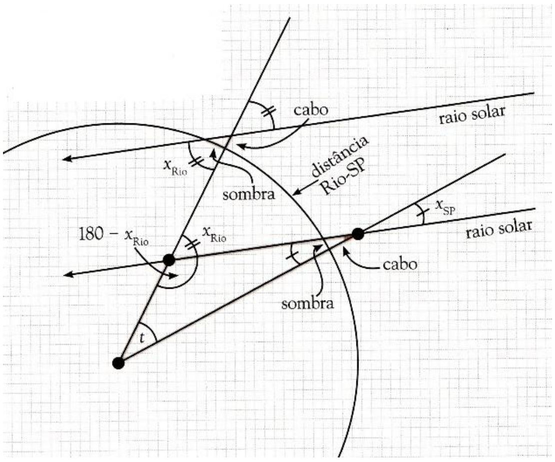
Algumas versões da história relatam que Eratóstenes, sem uma teoria bem estabelecida sobre triângulos e todo aparato tecnológico estimou que a Terra tinha aproximadamente 46516 km, dando uma lavada nas pessoas em pleno século 21.

Para aplicar o método de Eratóstenes, usando as medições da sombra e do cabo, o alunos imagina que corta a Terra em um círculo máximo para isso imaginou que as cidades estivessem no mesmo meridiano pois, a circunferência do meridiano e a mesma da Terra. Então ele faz o desenho de um círculo representando a circunferência da Terra e marca São Paulo e o Rio de Janeiro. Daí, ele desenha os cabos de vassoura em cada cidade, as sombras e os raios solares, indica o ângulo formado pelo cabo e o solar por x_{SP}, no caso de São Paulo e por x_{RIO}, no caso do Rio. Nos dois casos determina o ângulo formado calculando o valor da tangente conforme indicado abaixo:

$$\frac{sombra}{cabo} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \tan x.$$

Em seguida consulta uma tabela trigonométrica, ele também prolonga cada cabo até o centro da Terra, formando-se assim um triângulo, veja a figura 19 abaixo.

Figura 19 – Representação gráfica do problema



Fonte: Revista Cálculo, edição 39, abril de 2014

Ele sabe agora pelo teorema de Tales e pela propriedade de ângulos alternos internos que o ângulo x_{RIO} forma 180° com um dos ângulos do triângulo. Ele nota que x_{SP} é um dos ângulos do triângulo, daí ele usa o fato de que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° para determinar o ângulo desconhecido que ele chamou de t.

$$(180° - x_{RIO}) + x_{SP} + t = 180°$$

$$t = x_{RIO} - x_{SP}$$

Depois de determinar t o aluno usa o fato da Terra ser uma esfera, e como um círculo 360°, ele diz que proporção entre o arco d (distância entre as duas cidades) e o ângulo t é igual à proporção entre a circunferência da Terra T e 360°. Usando uma regra de três simples ele conclui que:

$$\frac{t}{360°} = \frac{d}{T} \Longrightarrow T = \frac{360°. d}{t}.$$

A conclusão a que se chega é que, Eratóstenes não podia dar-se ao luxo de errar tanto como os alunos de nosso século, pois ele não tinha meios de confirmar seu resultado. Mas assim como ele, as duas turmas conseguiram mais que resultados precisos, aplicaram um método que mostra como é grande o poder daqueles que usam matemática mesmo que objeto de estudo seja tão como um planeta.

6. HIPARCO

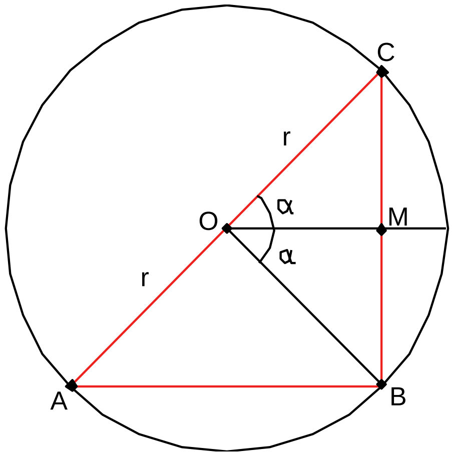
De acordo com Boyer (2010) e Eves (2011), Hiparco de Nicéia, por volta de (180-125 a. E. C.) foi matemático e possivelmente o mais notável dentre os astrônomos da antiguidade. Hiparco, além de fazer a transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu, destacou-se ainda, pela rigorosidade de suas observações e segurança das conclusões a que chegou. Apesar de se fazer referência a um equinócio vernal registrado por Hiparco em Alexandria, no ano 146 a. E. C., foi no observatório de Rodes, um importante centro comercial da época, que ele fez as mais relevantes observações astronômicas. As principais contribuições em astronomia que se atribui a Hiparco são: a sistematização de dados empíricos provenientes dos babilônios; a elaboração de um catálogo com 850 estrelas; determinação da duração do dia e do ano; cálculo da paralaxe lunar, do tamanho da Lua, da inclinação da eclíptica; que se podia localizar pontos sobre a superfície terrestre por meio de suas latitude e longitude; descoberta da a precessão dos equinócios, sendo esta sua principal descoberta. Presume-se ainda que ele tenha sido um dos responsáveis pela construção de sistemas planetários geométricos. Mas tudo o que sabemos sobre as obras de Hiparco é meio duvidoso, uma vez que poucos de seus escritos chegaram até nós. O que sabemos de suas contribuições científicas é proveniente de fontes indiretas.

6.1. Contribuições de Hiparco para a matemática

Contudo, as contribuições de Hiparco para a astronomia não foram tão importantes quanto sua contribuição para o avanço da trigonometria. Pela elaboração da que foi a primeira tabela trigonométrica da história ele ganhou o direito de ser chamado de *pai da trigonometria*. E por meio dessa tabela introduziu na trigonometria grega a divisão da circunferência em 360 partes cada uma delas sendo chamada de grau. Possivelmente teve essa ideia estudando a astronomia babilônica ou os escritos do grego Hipsicles astrônomo grego que dividiu o dia em 360 partes. Comentando a respeito da tabela de cordas de Ptolomeu, Têon de Alexandria (século IV) atribui a Hiparco um tratado constituído de 12 livros onde ele se ocupa da construção de uma tabela de cordas que tinha.

Segundo Giovanni Júnior e Ruy (2009), os matemáticos gregos não usavam o seno do ângulo, eles trabalhavam com a corda do arco duplo. Vejamos como calcular o seno de um ângulo α a partir do comprimento da corda do arco 2α (ou $crd2\alpha$) de um arco. Considere a figura 20 seguinte, onde $r = 60$. Devido ao fato de ele usar a matemática dos babilônios cuja base era 60.

Figura 20 – Circunferência e a corda BC do arco 2α



Fonte: Autor, 2014

$$sen\ \alpha = \frac{CM}{OC} = \frac{BC}{AC} = \frac{crd\ 2\alpha}{2r} \Longrightarrow crd\ 2\alpha = 2r.sen\ \alpha.$$

De acordo com (EVES, 2011) posteriormente, uma tábua contendo essencialmente o seno dos ângulos de 0° a 180° com variação de meio em meio grau foi construída pelo grego Ptolomeu.

7. PTOLOMEU

De acordo com Boyer (2010) e Eves (2011), Cláudio Ptolomeu (ou Ptolomeu de Alexandria) foi o responsável pela obra trigonométrica mais importante da antiguidade denominada *Syntaxis matemática* (ou Síntese matemática), composta de 13 livros e que por sua consistência e elegância distinguiu-se das demais obras astronômicas e tornou-se muito influente no meio cientifico. Por sua enorme relevância, a obra de Ptolomeu ficou sendo chamada de a coleção *maior* (magiste) para fazer distinção entre as coleções menores sobre astronomia de Aristarco e os outros autores. Depois os Árabes passaram a chamar esse tratado de *o maior* como o artigo o em árabe é *al.* O tratado de Ptolomeu passou a ser chamado de *Almagesto.*

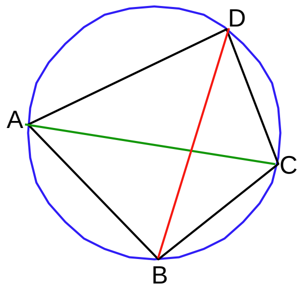
Segundo Aaboe (2013), sobre Ptolomeu, sabe-se pouco, pois detalhes como quando ou onde nasceu são desconhecidos A respeito de seu trabalho o *Almagesto*, este fornece dados de observações astronômicas que permitem datá-lo por volta de 150 E. C.

> No Almagesto Livro IV, cap. 6: “Dos três eclipses lunares, selecionados entre os que nós próprios observamos com extremo cuidado em Alexandria, o primeiro aconteceu no décimo ano de Hadriano (o imperador romano), no dia 20/21 do mês egípicio Payni; o meio ocorreu meia e um quarto de hora equinocial (3/4 de hora) antes de meia noite; o eclipse foi total, e neste instante a posição verdadeira do Sol era 13 $\frac{1}{4}^{\circ}$ de Taurus, muito aproximadamente”, e de maneira semelhante para os outros eclipses. Este eclipse é facilmente indentificado como o que ocorreu em 133 d. C., no dia 6 de maio, às 22 h e 7 m G. M. T. (AABOE, 2013, pp. 176-7).

Ainda segundo Aaboe (2013), considera-se que o *Almagesto* teve para a astronomia a mesma importância que os *Elementos* de Euclides e as *Cônicas* de Apolônio tiveram em seus respectivos ramos de conhecimento matemático. Essa obra, fez com que os antecessores de Ptolomeu fossem muito superficiais, fazendo com que a maioria deles se perdessem, mas ao contrário de Euclides Ptolomeu reconheceu todo conhecimento produzido por seus antecessores.

Segundo Boyer (2010) e Eves (2011), supõe-se que o *Almagesto* de Ptolomeu, foi inspirado na obra *Cordas num círculo* de Hiparco. Sabemos que, em astronomia Ptolomeu usou o catálogo de estrelas deixado por Hiparco. No entanto, não se pode afirmar que, para fazer suas tabelas trigonométricas, ele tenha usado as tabelas de seu renomado antecessor. O Livro I contém as tabelas trigonométricas e também uma exposição minuciosa de como obtê-la, usando-se uma importante proposição geométrica que conhecemos como teorema de Ptolomeu, cujo enunciado é o seguinte: *Num quadrilátero cíclico, o* *produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos.* veja a figura 21.

Figura 21 – Quadrilátero ABCD inscrito na circunferência



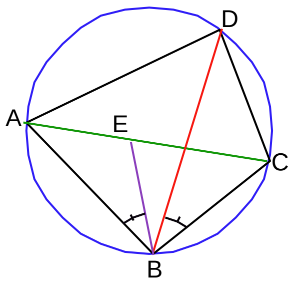
Fonte: Autor, 2014

Em notação matemática temos

$$AB.DC + AD.BC = BD.AC$$

Para demonstrar esse fato, tome um ponto E sobre a diagonal AC de modo que o ângulo $A\hat{B}E$ seja congruente ao ângulo $C\hat{B}D$. Veja a figura 22 seguinte.

Figura 22 – Ângulo $A\hat{B}E$ congruente ao ângulo $C\hat{B}D$



Fonte: Autor, 2014

Observe agora que os triângulos BCE e ADB são semelhantes, pois os ângulos EBC e ABD são congruentes por construção e os ângulos ACB e ADB são congruentes porque subtendem o mesmo arco. Daí, obtemos,

$$\frac{BC}{BD} = \frac{CE}{AD}$$

ou

$$AD.BC = BD.CE. \qquad (1)$$

Veja ainda que os triângulos ABE e BCD são semelhantes, pois os ângulos ABE e CBD são congruentes e os ângulos BAC e BDC são congruentes, pois subtendem o mesmo arco. Dessa forma temos

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$$

Ou ainda,

$$AB.CD = BD.AE. \qquad (2)$$

Somando-se as igualdades (1) e (2) teremos

$$AD.BC + AB.CD = BD.CE + BD.AE$$

$$AD.BC + AB.CD = BD.(CE + AE)$$

como $CE + AE = AC$, obtemos

$$AD.BC + AB.CD = BD.AC.$$

Usando esse teorema, Ptolomeu demonstra que dados os arcos α e β e suas respectivas cordas, pode-se achar a corda do arco diferença em função das cordas dos arcos dados. Com isso ele deduz o que atualmente usando as funções seno e cosseno representa a expressão $sen(a \pm b)$. Se $crd\,\alpha$ é a corda do arco α, e considerando o raio do círculo igual a 60, ele conclui que. Os matemáticos gregos, que faziam cálculos com frações e usavam as frações babilônicas devido à facilidade que elas traziam para seus cálculos, daí a razão pela qual o raio do círculo era 60:

$$120crd(\alpha - \beta) = crd\alpha.crd(180 - \beta) - crd\beta.crd(180 - \alpha)$$

que nos lembra a expressão

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha.cos\beta - sen\beta.cos\alpha.$$

Além disso, mostrou utilizando o teorema de Pitágoras que se α é um ângulo agudo então vale a relação.

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1.$$

As exposições astronômicas contidas no *Almagesto* foram utilizadas como padrão até de Copérnico e Kepler.

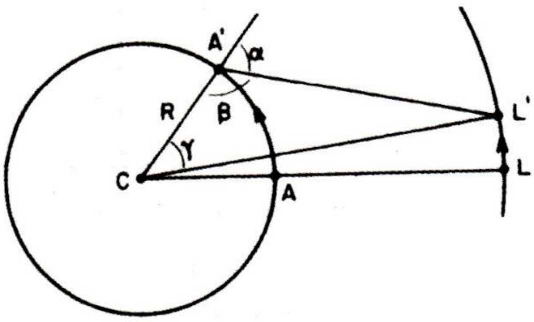
7.1. **Contribuições de Ptolomeu**

De acordo com Boyer (2010) e Eves (2011), é comum lembrarmos de Ptolomeu hoje por causa de seu *Almagesto*, mas essa não foi a sua única obra.

Dentre as mais importantes destaca-se *Geografia,* composta de 8 livros, que tem para os geógrafos a mesma importância que o *Almagesto* para os astrônomos. Nela ele descreve dentre outras coisas um sistema de latitudes e longitudes iguais aos que ainda são usados, catalogou aproximadamente 8000 cidades e outros aspectos importantes da Terra. Ele também escreveu sobre óptica e música. Tentou deduzir o postulado V (ou das paralelas) de Euclides, tendo em vista os outros postulados e axiomas dos *Elementos*, em uma tentativa fracassada de eliminá-lo das suposições iniciais desta obra.

Ptolomeu e o cálculo da distância da Terra à Lua. Segundo (RPM 01, 1982), o método proposto por Ptolomeu para calcular a distância da Terra à Lua é muito simples, porém engenhoso. Ele começou imaginando um observador num ponto A na Terra o qual vê a Lua sobre si verticalmente na posição L. Após um determinado tempo t, o observador por causa do movimento de rotação da Terra muda da posição A para a posição A'. Simultaneamente a Lua passa para a posição L'. Veja a figura 23

Figura 23 – Representação geométrica do método



Fonte: Explorando o Ensino de Matemática – Atividades vol. 2

Os ângulos $A\hat{C}A'$ e $A\hat{C}L'$ são conhecidos, uma vez que se conhece os movimentos da Terra e da Lua, daí pode-se determinar γ, uma vez que $\gamma = A\hat{C}A^{'} - A\hat{C}L'$. Pode-se medir diretamente o ângulo α e como o ângulo β é seu suplemento este também fica determinado. Desse modo o triângulo $CA'L$ fica bem determinado pelo lado $CA^{'} = R$ e os ângulos β e γ. Assim, a distância CL' da Terra à Lua pode ser calculada em função de R.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo Pontes e Pontes (2020), a matemática tem um poder inigualável, além de ser prazerosa para os seus fiéis entusiasmados que empregam de todo o pensamento matemático, é extremamente perturbador para aqueles que dizem não adorar ou sentem dificuldades em seu aprendizado, frequentemente transmitidos dos seus professores dos anos iniciais da educação básica, porém, eles próprios, compreendem da importância e precisão dessa que é a ciência que explica as coisas. Teus princípios, analogias e conjecturas tornam a maior de todas, sejam nas pequenas atividades até os grandes problemas em aberto para resolver.

Espera-se que este artigo possa colaborar para incentivar jovens a seguir o caminho do desenvolvimento pleno da matemática e que possa empregar todo o seu poder em busca de novos conhecimentos e saberes. .

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**/ AaboeAsger; tradução de João Bosco Pitombeira. – Rio de Janeiro: SBM, 2013.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 3ª. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais:
Matemática. Brasília: MEC, 1998.

EVES, Howard. **Introdução da História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

Explorando o ensino da Matemática: atividades: volume 2/ seleção e organização Ana Catarina P. Hellmeister... [et al.]; organização geral Suely Druck. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática**, 9º ano/ José Ruy, Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. – Ed. Renovada. – São Paulo: FTD, 2009. – (Coleção a conquista da matemática).

GUELLI, Oscar. **Contando a História da Matemática**: volume 6 dando corda na trigonometria. São Paulo. Ed. Ática, 1993.

História da Astronomia [Aistarco de Samos]. Disponível em: <https://www.youtube. com/watch?v=WJBpCex4cLw>. Acesso em 28 nov. 2013.

IEZZI, G; HAZZAN, S; **Fundamentos de Matemática Elementar**, 2ª ed. São Paulo: Atual, 1977.

NOBRE, S. **Elementos historiográficos da matemática presentes em enciclopédias universais.** 2001. Dissertação (Livre Docente em Geociências)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

NOGUEIRA, Salvador. Astronomia: **ensino fundamental e médio/** Salvador Nogueira, João Batista Garcia Canalle. Brasília: MEC, SEB; MCT; AEB, 2009. 232 p.:il. – (Coleção Explorando o ensino; v. 11).

O legado de Pitágoras. Disponível em: <http://tvescola.mec.gov.br/tve/search?searchField=o+legado+de+pitagoras&clearBreadCrumb=true>. Acesso em 13 de nov. 2013.

PONTES, Edel Alexandre Silva; PONTES, Edel Guilherme Silva. A Matemática é Arretada: Um Colóquio Entre Dois Irmãos Matemáticos. **Revista Psicologia & Saberes** , v. 9, n. 14, pág. 112-130, 2020.

Revista Cálculo, edição 39, ano 4, abril, 2014, ISSN: 2179-1384. Ministério da Educação - FNDE. PNBE, periódicos, 2014.

RPM, **Revista do Professor de Matemática**, nº 01, 1982, ISSN: 0102-4981, SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo.

RPM, **Revista do Professor de Matemática**, nº 54, 2º quadrimestre de 2004, ISSN: 0102-4981, SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo.

RPM, **Revista do Professor de Matemática**, nº 62, 1º quadrimestre de 2007, ISSN: 0102-4981, SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: **ciência, linguagem e tecnologia**, 2: ensino médio/ Jackson Ribeiro. – São Paulo: Scipione, 2010.

ROQUE, Tatiana**. Tópicos de História da Matemática**/ Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira Carvalho. Rio de Janeiro: SBM, 2012.