IMERSÕES ISOMÉTRICAS MÍNIMAS DE $S^3(a)$ EM $S^N(1)$

Edmilson de Vasconcelos Pontes

Tese de Doutoramento

I M P A

1974

Durante a elaboração deste trabalho, o autor contou com apoio financeiro da Universidade Federal de Alagoas e com bolsa do CNPq, Proc. nº 16.295/73.

A Élia.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado sob a orientação de Manfredo Perdigão do Carmo, a quem agradeço por me ter sugerido o problema, pelas conversas valiosas e pelos estímulos em momentos decisivos.

Devo agradecimentos a muitas outras pessoas:
Aos professores do IMPA, em especial, a Pedro Nowosad, Gervásio Colares e Rubens Leão; aos colegas de doutoramento Maria Alice Rocha, Alexandre Magalhães e, em especial, Idalisa Lima que, desenvolvendo técnicas deste trabalho, obteve uma imersão isométrica mínima de $S^3(\sqrt{8})$ em $S^{15}(1)$.

Agradecimento às pessoas que tornaram possível minha permanência no Rio: Governador Prof. Afrânio Lages, Reitor Prof. Nabuco Lopes, Pró-Reitor Prof. Manoel Ramalho, Chefe de Departamento Prof. Antônio Mafra, colegas do Departamento de Matemática professores Petrônio Viana, Jalbas Tavares Lira, Hermano Pedrosa, Fernando Milito, Milton Leite Soares, João Ramalho e Inaldo Diégues.

Agradecimentos ao competente Wilson Góes, pelo trabalho de datilografia.

ABSTRACT

Let $S^n(a)$ be the n-sphere of radius $\underline{a}$ in Euclidean space E^{n+1}. The isometric minimal immersions of $S^3(a)$ into $S^n(1)$ are those immersions that preserve the inner products of tangent vectors and whose $n+1$ coordinate functions are homogeneous polynomials $P(x) = P(x_0, x_1, x_2, x_3)$ of the same degree s with four indeterminates, such that $\sum_{i=0}^{3} x_i^2 = a^2$ and $\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_i^2} = 0$. Such an immersion is called totally geodesic when the image of $S^3(a)$ is an equator of $S^n(1)$. For each integer $s \geq 2$, it is possible to construct isometric minimal immersions (not totally geodesic) of $S^3(a)$ into $S^8(1)$, into $S^{15}(1), \ldots,$ into $S^{s(s+2)}(1)$. When $s \geq 4$, M. do Carmo and N. Wallach have proved the existence of a large family of isometric minimal immersions (not totally geodesic) of $S^3(a)$ into $S^n(1)$, with $n \leq s(s+2)$; a lower bound for n in this case was not known.

This raises the following question, asked by S.S. Chern. "Let $S^3(a) \to S^7(1)$ be an isometric minimal immersion. Is it totally geodesic?". The aim of this work is to provide an affirmative answer to this question by proving the following result.

<u>Theorem</u> - <u>Let</u> $S^3(a) \subset E^4 \to S^n(1) \subset E^{n+1}$ <u>be an isometric minimal immersion which is not totally geodesic.</u>

<u>Then</u> $n \geq 8$.

Secção 0 - Introdução.

Seja $S^n(a)$ a esfera n-dimensional de raio a, no espaço euclideano E^{n+1}, com a métrica induzida. Em [2] S.S. Chern faz a seguinte pergunta: "Seja $S^3(a) \to S^7(1)$ uma imersão isométrica mínima. É totalmente geodésica?".

O objetivo deste trabalho é provar o seguinte teorema.

Teorema - Seja $S^3(a) \subset E^4 \to S^N(1) \subset E^{N+1}$ uma imersão isométrica mínima, não totalmente geodésica. Então $N \geq 8$.

Em [4], M.P. do Carmo e N.R. Wallach descreveram qualitativamente a classe das imersões isométricas mínimas de $S^n(a)$ em $S^N(1)$. A fim de situar o nosso Teorema no contexto das imersões mínimas de esferas em esferas, daremos a seguir um resumo dos principais resultados de [3].

Para maiores detalhes sobre os fatos que relacionaremos nos próximos parágrafos, veja [3] e [4],

Seja $P(x) = P(x_0, \ldots, x_n)$ um polinômio homogêneo do grau s, a $n+1$ indeterminadas, satisfazendo a equação de Laplace

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_i^2} = 0.$$

A restrição de $P(x)$ a $S^n(1)$ é chamada esférico harmônico do grau s em $S^n(1)$.

M.P. do Carmo e N.R. Wallach definiram em [4] as

<u>imersões mínimas "standards"</u> como segue. O espaço vetorial V^s dos esféricos harmônicos do grau s em $S^n(1)$, tem dimensão $m(s)+1$, onde

$$m(s) = (2s+n-1) \cdot \frac{(s+n-2)!}{s!(n-1)!} - 1.$$

É possível munir V^s com um produto interno:

$$\langle f,g\rangle = \int_{S^n(1)} fg\, dv, \quad f,g \in V^s,$$

onde dv é proporcional ao elemento de volume de $S^n(1)$ e normalizado de tal modo que

$$\int_{S^n(1)} dv = m(s)+1.$$

Seja $\{f_o,\ldots,f_n\}$ uma base ortonormal de V^s. Defina a aplicação

$$y(n,s)\colon S^n \to E^{m(s)+1}$$

por meio de

$$y(n,s)(p) = \frac{1}{m+1}\,(f_o(p),\ldots,f_m(p)), \quad p \in S^n.$$

Não é difícil mostrar que $y(n,s)$ é uma imersão mínima na esfera $S^m(1)$ com métrica induzida de curvatura seccional constante $k(s)$,

$$k(s) = \frac{n}{s(s+n-1)}.$$

Tais aplicações são chamadas <u>imersões mínimas "standards"</u>. Assim sendo, a cada inteiro positivo s, corresponde uma imersão isométrica mínima da esfera $S^n(\sqrt{\frac{1}{k(s)}})$ na esfera $S^{m(s)}(1)$.

Por conveniência, diz-se que duas imersões $\varphi_1, \varphi_2: S^n \to S^m(1)$ são equivalentes se diferem por um movimento rígido, isto é, se existe uma isometria ρ de $S^m(1)$ tal que $\varphi_2 = \rho \circ \varphi_1$.

É consequência de um teorema de Takahashi (v. [4], pg. 46) que qualquer imersão mínima de $S^n \to S^\ell(1)$ com métrica induzida de curvatura seccional constante k, é equivalente a uma perturbação linear de alguma imersão mínima "standard", e que $k = k(s)$, para algum s. Ademais, [4] mostra que, para $n = 2$ com s arbitrário ou para $s \leq 3$ com n arbitrário, essa perturbação é a identidade, e, portanto, em tal caso, qualquer imersão mínima $x: S^n \to S^\ell(1)$, com métrica induzida de curvatura seccional constante, é equivalente a uma $y(n,s)$. Ainda, nas mesmas hipóteses sobre os valores de $\underline{n}$ e $\underline{s}$, se $x(S^n)$ não está contida em hiperplano de E^{m+1}, tem-se $\ell = m(s)$.

Finalmente, o principal resultado de [4] mostra que, para $n \geq 3$ e $s \geq 4$, as perturbações lineares das imersões mínimas "standards" preenchem um conjunto convexo L, de dimensão ≥ 18 (onde por dimensão de L se entende a dimensão do menor espaço vetorial contendo L). Mais precisamente: Para $n \geq 3$ e $s \geq 4$, a cada par (n,s) corresponde um conjunto convexo, compacto, que pode ser aplicado bunivocamente sobre o conjunto das classes de equivalência das imersões mínimas $x: S^n \to S^\ell(1)$, com métrica de curvatura seccional constante. Essa aplicação é tal que pontos do interior L^o de

L correspondem às imersões para as quais $\ell = m(s)$, e pontos da fronteira ∂L de L correspondem àquelas para as quais $\ell < m(s)$ (excluem-se nesse enunciado as imersões cujas imagens estejam contidas em hiperplanos de $E^{\ell+1}$).

Assim sendo, em face do resultado principal de [4], é fácil situar o nosso Teorema no contexto desse trabalho. Ponha $n = 3$. Para $s = 2$ e $s = 3$, a menos de equivalências, existem apenas as imersões mínimas "standards" de $S^3(\sqrt{\frac{8}{3}})$ em $S^8(1)$ e $S^3(\sqrt{5})$ em $S^{15}(1)$, respectivamente. Para $s \geq 4$, conforme foi dito no parágrafo anterior, a situação muda radicalmente, existindo uma família contínua de imersões mínimas não equivalentes. É natural então perguntar pela dimensão mínima da esfera unitária $S^\ell(1)$ em que $S^3(a)$ possa ser imersa minimalmente com métrica induzida de curvatura seccional constante. O nosso Teorema responde a essa pergunta e constitui um primeiro passo na direção de determinar o comportamento da fronteira ∂L do conjunto L.

Daremos a seguir uma idéia dos meios que utilizamos para provar o Teorema.

Partimos do fato que as $N+1$ funções coordenadas de uma imersão isométrica mínima de $S^3(a) \subset E^4$ em $S^N(1) \subset$ $\subset E^{N+1}$ são esféricos harmônicos, de um mesmo grau s. Isso permite associar à imersão, de maneira natural, uma matriz M, cujas linhas são constituidas pelos coeficientes dessas funções coordenadas.

É fácil ver que a prova do Teorema fica reduzida a mostrar que o posto de M é ≥ 9.

A fim de determinar essa cota, é natural trabalhar com as colunas dessa matriz, que são vetores de E^{N+1}. É possível mostrar que o espaço $V(H)$ gerado por esses vetores contém um subespaço tridimensional e 6 subespaços unidimensionais, independentes entre si, quando a imersão à qual a matriz está associada, é uma isometria mínima não totalmente geodésica. A prova desse fato constitui o Lema 4.1 (Secção 4).

A idéia decisiva para a prova do Lema 4.1 reside na escolha conveniente de certos subespaços de $V(H)$ e nas estimativas de suas dimensões. Por um lado, tal escolha é sugerida pelas relações (obtidas na Secção 2) envolvendo os geradores de $V(H)$. Por outro lado, a escolha desses subespaços se faz de tal modo que é possível relacionar suas dimensões com o grau s das funções coordenadas. Essa possibilidade é um ponto essencial da prova do Lema 4.1 e constitui o material da Secção 3.

Na Secção 1, escrevemos a imersão como um "polinômio" H homogêneo, do grau s, cujos coeficientes são vetores $A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \in E^{N+1}$. Definimos o espaço $V(H)$ e certos subespaços $V_i(H)$, $i = 1,\ldots,8$, de $V(H)$.

Na Secção 2, usando sucessivamente as condições da imersão estar contida em $S^N(1)$, ser isométrica e ser mínima, deduzimos uma série de fórmulas envolvendo os vetores $A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$.

Na Secção 3, distinguimos os subespaços dos $V_i(H)$, $i = 1,\ldots,8$, que serão usados na prova do Lema 4.1.

Com restrições impostas às dimensões desses subespaços, juntamente com a escolha de um sistema de coordenadas adequado, expressamos a norma da 2ª forma fundamental em termos de produtos dos vetores $A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$. Usando então o fato que a imersão é mínima e de curvatura seccional constante, a fórmula de Gauss permite relacionar aquelas restrições com o grau s de H.

Na Secção 4, prova-se o Lema 4.1, do qual o Teorema é consequência imediata.

O nosso Teorema sugere a seguinte generalização do problema de Chern: <u>Seja</u> $S^n(a) \to S^N(1)$ <u>uma imersão isométrica mínima não totalmente geodésica.</u> <u>É</u> $N \geq \frac{n!}{(n-2)!2!} + 2n-1$?

<u>Secção 1</u> - <u>Definições preliminares.</u>

Seja

$$H = (\varphi_0,\dots,\varphi_N): S^3(a) \subset E^4 \to S^N(1) \subset E^{N+1},$$

uma imersão isométrica mínima. Então ([2]) as funções coordenadas são esféricos harmônicos sobre $S^3(a)$, i.e., cada φ_i $(0 \leq i \leq N)$ é a restrição a $S^3(a)$ de um polinômio homogêneo do grau s, com quatro indeterminadas, satisfazendo a condição

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k^2} = 0 . \tag{1.1}$$

Inicialmente colocamos

$$\varphi_i = \sum_{\Sigma\alpha_i=s} a_{\alpha_1\ldots\alpha_4}\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_4^{\alpha_4} \tag{1.2}$$

e escrevemos

$$H = \sum_{\Sigma\alpha_i=s} A_{\alpha_1\ldots\alpha_4}\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_4^{\alpha_4} \tag{1.3}$$

onde os vetores

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_4} = (a^0_{\alpha_1\ldots\alpha_4},\ldots,a^N_{\alpha_1\ldots\alpha_4}) \in E^{N+1} \tag{1.4}$$

são os vetores colunas da matriz cuja i-ésima linha é formada pelos coeficientes de φ_i $(0 \leq i \leq N)$.

<u>Definição 1.1</u> - Chamaremos de $V(H)$ o subespaço vetorial de E^{N+1} gerado pelos vetores $A_{\alpha_1\ldots\alpha_4}$.

Identifique o conjunto

$$X^s = \{x_1^{\alpha_1}\ldots x_4^{\alpha_4};\ \Sigma\alpha_i=s,\ \alpha_i \geq 0,\ \text{inteiro}\} \tag{1.5}$$

com o tetraedro

$$T^s = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_4,0,\ldots,0) \in E^{N+1};\ \Sigma\,\alpha_i=s,\ \alpha_i \geq 0,\ \text{inteiro}\}$$

por meio da correspondência

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_4^{\alpha_4} \leftrightarrow (\alpha_1,\ldots,\alpha_4,0,\ldots,0).$$

<u>Definição 1.2</u> - Diremos que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_4,0,\ldots,0) \in T^s$ e $(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_4,0,\ldots,0) \in T^s$ são equivalentes se e só se, para cada $i = 1,\ldots,4$, $\alpha_i - \alpha'_i \equiv 0 \pmod{2}$.

<u>Lema 1.1</u> - A relação definida sobre T^s na Definição 1.2 é uma relação de equivalência e decompõe T^s em 8 classes de equivalência C_i, $i = 1,\ldots,8$, se $s > 2$.

<u>Prova</u>: Seja $\xi_{ijk\ell} = (i,j,k,\ell,0,\ldots,0) \in T^s$. Ponha $\xi_1^0 = \xi_{s000}$, $\xi_2^0 = \xi_{(s-1)100}$, $\xi_3^0 = \xi_{(s-1)010}$, $\xi_4^0 = \xi_{(s-2)110}$, $\xi_1^1 = \xi_{(s-1)001}$, $\xi_2^1 = \xi_{(s-2)101}$, $\xi_3^1 = \xi_{(s-2)011}$ e $\xi_4^1 = \xi_{(s-3)111}$. Mostraremos que (ξ_m^n), $m = 1,2,3,4$, $n = 0,1$, são representantes das únicas oito classes distintas C_i, $i = 1,\ldots,8$. Uma inspeção dos (ξ_m^n) mostra de imediato que pertencem a classes distintas. Falta mostrar que qualquer elemento $\eta \in T^s$ é equivalente a ξ_m^n para um certo par (m,n), com $m = 1,2,3,4$, $n = 0,1$. Seja $\eta = \xi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$. Há oito casos a examinar.

a) $\alpha_1 \equiv s, \quad \alpha_2 \equiv 0, \quad \alpha_3 \equiv 0 \Rightarrow \eta \equiv \xi_1^0$

b) $\alpha_1 \equiv s, \quad \alpha_2 \equiv 0, \quad \alpha_3 \not\equiv 0 \Rightarrow \eta \equiv \xi_3^1$

c) $\alpha_1 \equiv s, \quad \alpha_2 \not\equiv 0, \quad \alpha_3 \equiv 0 \Rightarrow \eta \equiv \xi_2^1$

d) $\alpha_1 \equiv s, \quad \alpha_2 \not\equiv 0, \quad \alpha_3 \not\equiv 0 \Rightarrow \eta \equiv \xi_4^0$

e) $\alpha_1 \not\equiv s, \quad \alpha_2 \equiv 0, \quad \alpha_3 \equiv 0 \Rightarrow \eta \equiv \xi_1^1$

f) $\alpha_1 \not\equiv s, \quad \alpha_2 \equiv 0, \quad \alpha_3 \not\equiv 0 \Rightarrow \eta \equiv \xi_3^0$

g) $\alpha_1 \not\equiv s, \quad \alpha_2 \not\equiv 0, \quad \alpha_3 \equiv 0 \Rightarrow \eta \equiv \xi_2^0$

h) $\alpha_1 \not\equiv s, \quad \alpha_2 \not\equiv 0, \quad \alpha_3 \not\equiv 0 \Rightarrow \eta \equiv \xi_4^1$

(Todas as congruências são mod. 2)

c.q.d.

Seja

$$\pi : T^s \to E^{N+1}$$

a aplicação definida por

$$\pi(\alpha_1,\ldots,\alpha_4,0,\ldots,0) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_4}.$$

Definição 1.3 - Chamaremos de $V_i(H)$ o subespaço de E^{N+1} gerado por $\pi(C_i)$, $i = 1,\ldots,8$.

Esses subespaços serão utilizados na Secção 3.

Secção 2 - Algumas relações fundamentais.

Nesta secção obteremos uma série de relações entre os vetores $A_{\alpha_1\ldots\alpha_4}$, definidos em (1.4). Essas relações serão usadas para demonstrar as Proposições e Lemas das secções seguintes.

Lema 2.1 - Se H, dado por (1.3), representa uma aplicação de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, valem as fórmulas

$$A^2_{s000} = \frac{1}{a^{2s}} \tag{2.1}$$

$$A^2_{(s-1)100} + 2\, A_{s000}\, A_{(s-2)200} = \frac{s}{a^{2s}} \tag{2.2}$$

Prova: A relação

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = a^2 \tag{2.3}$$

escreve-se na forma

$$1 = \frac{1}{a^{2s}} \sum_{\Sigma\alpha_i = s} \frac{s!}{\alpha_1! \ldots \alpha_4!} x_1^{2\alpha_1} \ldots x_4^{2\alpha_4} . \qquad (2.4)$$

Por outro lado, quadrando (1.3) formalmente como se fosse um polinômio, com as regras usuais da adição e multiplicação de polinômios, e com a observação adicional dos coeficientes $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_4}$, que são vetores de E^{N+1}, serem multiplicados por meio do produto interno de vetores, obtemos

$$H^2 = \sum_{\substack{\Sigma\alpha_i = s \\ \Sigma\beta_i = s}} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_4} A_{\beta_1 \ldots \beta_4} x^{\alpha_1 + \beta_1} \ldots x^{\alpha_4 + \beta_4} . \qquad (2.5)$$

Como $H^2 = 1$, a comparação de (2.4) com (2.5) fornece as relações (onde ϕ indica expressões, nem sempre as mesmas, que naõ interessam ao caso em questão)

$$A^2_{s000} x_1^{2s} + \phi = \frac{1}{a^{2s}} x_1^{2s} + \phi$$

$$A^2_{(s-1)100} + 2A_{s000} A_{(s-2)200} x_1^{2s-2} x_2^2 + \phi = \frac{s}{a^{2s}} x_1^{2s-2} x_2^2 + \phi .$$

<u>Lema 2.2</u> - Se as funções coordenadas φ_i $(0 \leq i \leq N)$, dadas em (1.2), são harmônicas, i.e., satisfazem (1.1), então

$$s(s-1)A_{s000} + 2A_{(s-2)200} + 2A_{(s-2)020} + 2A_{(s-2)002} = 0 \qquad (2.6)$$

$$\begin{aligned} &(s-1)(s-2)A_{(s-1)100} + 6A_{(s-3)300} + \\ &+ 2A_{(s-3)120} + 2A_{(s-3)102} = 0 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

<u>Prova</u>: Usando (1.3), temos em primeiro lugar que

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}$$

é um pólinômio homogêneo do grau $s-2$, que escreveremos na forma

$$\Delta H = \sum_{\Sigma\gamma_i = s-2} B_{\gamma_1 \dots \gamma_4} x_1^{\gamma_1} \dots x_4^{\gamma_4},$$

onde $B_{\gamma_1 \dots \gamma_4}$ é uma combinação linear de vetores $A_{\alpha_1 \dots \alpha_4}$, definidos em (1.4). A condição $\Delta H = 0$ implica, para cada monômio $x_1^{\gamma_1} \dots x_4^{\gamma_4} \in X^{s-2}$ (X^{s-2} é o conjunto dos monômios do grau $s-2$, de acordo com (1.5)), uma relação linear

$$B_{\gamma_1 \dots \gamma_4} = 0. \tag{2.8}$$

É imediato que $B_{(s-2)000} = 0$ e $B_{(s-3)100} = 0$ são (2.6) e (2.7), respectivamente.

c.q.d.

Lema 2.3 - Se H, dado por (1.3), representa uma isometria de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, então valem as fórmulas

$$A^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \frac{1}{a^{2s-2}}, \tag{2.9}$$

onde $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ é qualquer permutação de $(s-1)100$.

Prova: Considere em $S^3(a)$ as curvas dadas por

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 = a^2 \\ x_j = \text{constante} \\ x_k = \text{constante}, \end{cases} \tag{2.10}$$

com $(j,k)=(3,4)$, $(2,4)$, $(2,3)$. Denotaremos essas curvas por $\alpha(u_1)$, $\beta(u_2)$ e $\gamma(u_3)$, respectivamente. É possível escolher os parâmetros u_1,u_2,u_3, tais que os vetores tangentes sejam dados por

$$\alpha'(u_1) = (x_2, -x_1, 0, 0) \tag{2.11}$$

$$\beta'(u_2) = (x_3, 0, -x_1, 0) \tag{2.12}$$

$$\gamma'(u_3) = (x_4, 0, 0, -x_1) \tag{2.13}$$

Esses caminhos são levados por H em caminhos $H(u_i)$, contidos em $H(S^3(a))$, $i = 1,2,3$. Denotaremos por H_i o vetor tangente ao caminho $H(u_i)$. Como H é uma isometria e levando em conta (2.11), (2.12) e (2.13), temos

$$H_i^2 = x_1^2 + x_{i+1}^2, \quad i=1,2,3. \tag{2.14}$$

Usando (1.3), temos que H_i é do grau s, e levando em conta (2.3), (2.4) e (2.14), escrevemos H_i^2 nas formas

$$H_i^2 = (x_1^2 + x_{i+1}^2)\left(\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right)^{s-1}, \tag{2.15}$$

$$H_i^2 = \frac{1}{a^{2s-2}}(x_1^2+x_{i+1}^2) \sum_{\Sigma\alpha_i=s-1} \frac{(s-1)!}{\alpha_1!\ldots\alpha_4!} x_1^{2\alpha_1}\ldots x_4^{2\alpha_4} \tag{2.16}$$

Para fixar idéais, suponha $i = 1$. Utilizando a regra da cadeia em $H(x_1(u_1),\ldots,x_4(u_4))$ e usando (2.11), temos

$$H_1 = -A_{(s-1)100}\, x_1^s + \phi.$$

Quadrando ambos os membros e comparando com (2.16), obtemos finalmente

$$A^2_{(s-1)100} = \frac{1}{a^{2s-2}}.$$

As outras relações são obtidas de maneira análoga.

c.q.d.

Lema 2.4 - Se H, dado por (1.3), é uma imersão isométrica de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, então

$$A_{sooo}\, A_{(s-2)\beta_2\beta_3\beta_4} = -\frac{s(s-1)}{6a^{2s}}, \qquad (2.17)$$

onde $\beta_2\beta_3\beta_4$ é uma permutação de 2oo.

Prova: (2.17) é consequência de (2.1), (2.2) e (2.9).

Lema 2.5 - Se H, dado por (1.3), é uma isometria de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, então

$$\begin{aligned} A^2_{(s-2)11o} + 2A_{(s-1)1oo}\, A_{(s-3)12o} &= \frac{s-1}{a^{2s-2}} \\ A^2_{(s-2)11o} + 2A_{(s-1)o1o}\, A_{(s-3)21o} &= \frac{s-1}{a^{2s-2}} \end{aligned} \qquad (2.18)$$

(com permuta de 2 dos 3 últimos índices, as expressões valem).

Prova: Considere o sistema local de coordenadas cujas curvas coordenadas sejam dadas pelas imagens de (2.10). Usando as notações do Lema 2.3, e levando em conta (2.14), temos

$$H_1^2 = x_1^2 + x_2^2 .$$

Por derivação, obtemos

$$H_{12}\, H_1 = -x_1\, x_3$$

que escrevemos na forma

$$H_{12}\, H_1 = -x_1 x_3 \left(\frac{1}{a^{2s-2}} \sum_{\Sigma\alpha_i = s-1} \frac{(s-1)!}{\alpha_1!\ldots\alpha_4!}\, x_1^{2\alpha_1}\ldots x_4^{2\alpha_4}\right) \qquad (2.19)$$

A partir de (1.3), coletando os termos em $x_1^{2s-1}\, x_3$ de $H_{12}\, H_1$, obtemos

$$H_{12}\ H_1 =$$

$$(sA^2_{(s-1)1oo} - 2A_{(s-1)1oo}A_{(s-3)12o} - A^2_{(s-2)11o})x_1^{2s-1}\ x_3 + \phi \qquad (2.20)$$

Comparando (2.19) com (2.20) e usando (2.9), obtemos (2.18).

As demais relações são análogas.

c.q.d.

Lema 2.6 - Se H, dado por (1.3), é uma isometria, então

$$4A^2_{(s-2)2oo} + 6A_{(s-1)1oo}\ A_{(s-3)3oo} = \frac{s(s-1)(s+4)}{3\ a^{2s}} \qquad (2.21)$$

(pode-se permutar dois dos 3 últimos índices).

Prova: Usando o mesmo sistema de coordenadas do Lema 2.5, e derivando (2.24) com $i=1$, obtemos

$$H_{11}\ H_1 = 0.$$

Derivando (1.3) e coletando os termos em $x_1^{2s-1}\ x_2$ de $H_1\ H_{11}$, temos

$$H_1\ H_{11} = (sA^2_{(s-1)1oo} - s^2A^2_{sooo} + 4sA_{sooo}\ A_{(s-2)2oo} - 4A^2_{(s-2)2oo}$$
$$-6A_{(s-1)1oo}A_{(s-3)3oo})x_1^{2s-1}\ x_2 + \phi.$$

Usando (2.1), (2.9) e (2.17), obtemos (2.21). As demais relações são provadas de modo análogo.

c.q.d.

Lema 2.7 - Se H, dado por (1.3), é uma isometria, então

$$A^2_{(s-2)11o} + 4A_{(s-1)1oo}\ A_{(s-3)12o} + 4A_{(s-2)2oo}A_{(s-2)o2o} =$$
$$= \frac{2s(s-1)}{3\ a^{2s}}. \qquad (2.22)$$

(permuta de dois dos 3 últimos índices dá expressões válidas).

Prova: No sistema de coordenadas do Lema 2.5, temos

$$H_1 H_2 = x_2 x_3 \left(\frac{1}{a^{2s-2}} \sum_{\Sigma\alpha_i = s-1} \frac{(s-1)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_4!} x_1^{2\alpha_1} \ldots x_4^{2\alpha_4}\right).$$

Derivando (1.3) e coletando os termos em $x_1^{2s-2} x_2 x_3$, temos

$$-(s-1)A^2_{(s-1)1oo} + 2A_{(s-1)1oo}A_{(s-3)12o} + s^2A^2_{sooo} - 2sA_{sooo}A_{(s-2)o2o} -$$

$$-2sA_{sooo}A_{(s-2)2oo} + 4A_{(s-2)2oo}A_{(s-2)o2o} + A^2_{(s-2)11o} -$$

$$-(s-1)A^2_{(s-1)o1o} + 2A_{(s-1)o1o}A_{(s-3)21o} = \frac{1}{a^{2s-2}}.$$

Usando (2.1), (2.9) e (2.17), obtemos finalmente (2.30). As demais relações saem analogamente.

c.q.d.

Lema 2.8 - Se H, dado por (1.3), é uma isometria então

$$2A_{(s-2)2oo}A_{(s-2)o2o} + A_{(s-1)1oo}A_{(s-3)12o} = -\frac{s^2(s-1)}{6a^{2s}} \qquad (2.23)$$

(expressões análogas valem com coveniente permuta de dois dos três últimos índices).

Prova: É consequência de (2.18) e (2.22).

Lema 2.9 - Se H, dado por (1.3), é uma imersão isométrica mínima, então

$$\left.\begin{array}{l} A^2_{(s-2)11o} + A^2_{(s-2)o11} + 4A^2_{(s-2)o2o} \\ A^2_{(s-2)11o} + A^2_{(s-2)1o1} + eA^2_{(s-2)2oo} \\ A^2_{(s-2)1o1} + A^2_{(s-2)o11} + 4A^2_{(s-2)oo2} \end{array}\right\} = \frac{s(s-1)(s^2+3s+4)}{3\,a^{2s}} \qquad (2.24)$$

Prova: Multiplique (2.7) por $A_{(s-1)100}$ e use (2.21) e (2.18), obtendo a 1ª igualdade. As duas outras são análogas.

Lema 2.10 - Se H, dado por (1.3), é uma imersão isométrica mínima, então

$$\frac{s^2(s-1)^2}{36a^{2s}} \leq A^2_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \leq \frac{s(s-1)(s^2+3s+4)}{12\,a^{2s}}, \qquad (2.25)$$

onde $\alpha_i = 2$, $\alpha_j = \alpha_k = 0$ (i,j,k distintos).

Prova: Por (2.6), temos que A_{s000}, $A_{(s-2)200}$, $A_{(s-2)020}$ e $A_{(s-2)002}$ são dependentes. Usando (2.1) e (2.17) segue a cota inferior. Usando (2.24), obtém-se a outra cota.

c.q.d.

Lema 2.11 - Se H, dado por (1.3), representa uma isometria de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, então os vetores A_{s000}, $A_{(s-1)\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ $(\sum_{i=2}^{4} \alpha_i=1)$, são dois a dois ortogonais.

Prova: Usando (2.4) e (2.5), juntamente com a condição $H^2 = 1$, e coletando os termos em $x_1^{2s-1}x_2$, $x_1^{2s-1}x_3$ e $x_1^{2s-1}x_4$, obtemos

$$A_{s000}\,A_{(s-1)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = 0,$$

onde $\alpha_i = 1$, para algum i = 1,2,3.

Por outro lado, usando (2.10) com (j,k) = (3,4), temos

$$H\,H_1 = 0. \qquad (2.26)$$

Coletando os termos em $x_1^{2s-1}x_4$, obtemos

$$A_{(s-1)100}\, A_{(s-1)001} = 0.$$

Analogamente, obtém-se as demais relações.

c.q.d.

Lema 2.12 - Se H, dado por (1.3), é uma isometria, então A_{s000} é ortogonal a $A_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$, onde $\alpha_i = \alpha_j = 1$, $\alpha_k = 0$ (i,j,k distintos).

Prova: Em 2.26, temos

$$H = A_{s000}\, x_1^s + A_{(s-1)010}\, x_1^{s-1}\, x_3 + \phi$$

$$H = -A_{(s-1)100}\, x_1^s - A_{(s-2)110}\, x_1^{s-1} x_2 + \phi.$$

Em $H\,H_1 = 0$, coletando os termos em $x_1^{2s-1}\, x_3$, e usando o Lema 2.11, obtemos

$$A_{s000}\, A_{(s-2)110} = 0.$$

O resto da prova é análogo.

c.q.d.

Lema 2.13 - Se H, dado por (1.3), é umaimersão isométrica mínima de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, então $A_{(s-1)\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ $(\Sigma\alpha_i=1)$ são ortogonais a $A_{(s-2)\beta_2\beta_3\beta_4}$, onde $\beta_2\beta_3\beta_4$ é uma permutação de 110 ou 200.

Prova: Use (2.10) com $(j,k) = (3,4)$,

$$H_1 = -A_{(s-1)100}\, x_1^s + sA_{s000}\, x_1^{s-1}\, x_2 - 2A_{(s-2)200}\, x_1^{s-1} x_2 + \phi.$$

Usando então (2.15) com $i=1$, e coletando os termos em $x_1^{2s-1} x_2$, obtemos

$$A_{(s-1)100}\, A_{(s-2)200} = 0. \qquad (2.27)$$

Usando (2.10) com $(j,k) = (3,4)$ e $(j,k) = (2,4)$, temos

$$H_1^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$H_{12}\, H_1 = x_1\, x_3.$$

Derivando (1.3), obtemos

$$H_1 = -x_1^s\, A_{(s-1)100} + \phi$$

$$H_{12} = A_{(s-2)110}\, x_1^s + \phi$$

Dessas igualdades, segue que

$$A_{(s-1)100}\, A_{(s-2)110} = 0 \qquad (2.28)$$

Analogamente,

$$A_{(s-1)010}\, A_{(s-2)110} = 0 \qquad (2.29)$$

Por outro lado,

$$H_2 = sA_{s000}\, x_1^{s-1}\, x_3 - A_{(s-1)010}\, x_1^s - 2A_{(s-2)020}\, x_1^{s-1}\, x_3 + \phi.$$

$$H_1 = -A_{(s-1)100}\, x_1^s - A_{(s-2)110}\, x_1^{s-1}\, x_3 + \phi.$$

De (2.11) e (2.12), temos

$$H_1\, H_2 = x_2\, x_3.$$

Coletando os termos em $x_1^{2s-1}\, x_3$, obtemos

$$-sA_{s000}\, A_{(s-1)100} + 2A_{(s-1)100}A_{(s-3)020} + A_{(s-1)010}A_{(s-2)110} = 0.$$

Usando (2.29) e o Lema 2.11, segue

$$A_{(s-1)100}\, A_{(s-2)020} = 0.$$

Multiplicando (2.6) por $A_{(s-1)100}$ e usando o Lema 2.11 juntamente com (2.27) e (2.30), obtemos

$$A_{(s-1)100}\ A_{(s-2)002} = 0.$$

Considere agora um sistema de coordenadas cujas curvas coordenadas sejam do tipo (2.10), com a permuta de x_1 por x_2, isto é, com (2.11), (2.12) e (2.13) dados por

$$\alpha'(u_1) = (-x_2, x_1, 0, 0)$$
$$\beta'(u_2) = (0, x_3, -x_2, 0)$$
$$\gamma'(u_3) = (0, x_4, 0, -x_2).$$

Derivando (1.3), obtemos

$$H_1 = -A_{(s-1)010}\ x_1^{s-1}\ x_2 - A_{(s-2)110}\ x_1^{s-2}\ x_2^2 + \phi$$
$$H_2 = -A_{(s-1)001}\ x_1^{s-1}\ x_2 - A_{(s-2)101}\ x_1^{s-2}\ x_2^2 + \phi.$$

Multiplicando essas igualdades e coletando os termos em $x_1^{2s-3}\ x_2^3$, obtemos

$$A_{(s-1)020}\ A_{(s-2)101} + A_{(s-2)110}\ A_{(s-1)001} = 0.$$

Analogamente,

$$A_{(s-1)010}\ A_{(s-2)101} + A_{(s-1)100}\ A_{(s-2)011} = 0$$
$$A_{(s-1)001}\ A_{(s-2)110} + A_{(s-1)100}\ A_{(s-2)011} = 0.$$

Dessas igualdades segue que

$$A_{(s-1)100}\ A_{(s-1)011} = 0.$$

As demais relações saem de modo análogo.

c.q.d.

Lema 2.14 - Se H, dado por (1.3), é uma imersão isométrica mínima de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, então A_{sooo} é ortogonal a

$$A_{(s-3)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \quad (\sum_{i=2}^{4} \alpha_i = 3).$$

Prova: No sistema de coordenadas usado no Lema 2.5, temos

$$H_1 \, H = 0.$$

Por derivação, e usando (2.14), temos

$$H_{111} \, H + H_{11} \, H_1 = 0.$$

Derivando (2.14), com $i=1$,

$$H_{11} \, H_1 = 0.$$

Então

$$H_{111} \, H = 0 .$$

Derivando (1.3), obtemos

$$H_{111} = (sA_{(s-1)1oo} - 6A_{(s-3)3oo})x_1^s + \phi$$

$$H \, H_{111} = (sA_{sooo}A_{(s-1)1oo} - 6A_{sooo} \, A_{(s-3)3oo})x_1^{2s} + \phi.$$

Usando o Lema 2.11,

$$A_{sooo} \, A_{(s-3)3oo} = 0.$$

De (2.31), temos

$$H_{112} \, H + H_{11} \, H_2 = -2x_1 \, x_3.$$

Derivação de (1.3), com (2.11) e (2.12), dá

$$H_{112} = (-2A_{(s-3)21o} + (s-1)A_{(s-1)o1o}) \, x_1^s + \phi$$

$$H_{11} = (-sA_{sooo} + 2A_{(s-2)2oo})x_1^s + \phi$$

$$H_2 = -A_{(s-1)o1o}\, x_1^s + \phi .$$

As quatro últimas igualdades e (1.3), juntamente com os Lema 2.11 e Lema 2.13, dão

$$A_{sooo}\, A_{(s-3)21o} = 0.$$

Analogamente,

$$A_{sooo}\, A_{(s-3)12o} = 0.$$

Multiplicando (2.7) por A_{sooo} e usando (2.32), (2.33) e o Lema 2.11, obtemos

$$A_{sooo}\, A_{(s-3)1o2} = 0.$$

Derivação de $H_1\, H = 0$, fornece

$$H_{123}\, H + H_{12}\, H_3 = 0.$$

Derivação de (1.3), dá

$$H_{123} = -A_{(s-3)111}\, x_1^s + \phi$$

$$H_{12} = A_{(s-2)11o}\, x_1^s + \phi$$

$$H_3 = -A_{(s-1)oo1}\, x_1^s + \phi .$$

Dessas igualdades, segue

$$A_{sooo}\, A_{(s-3)111} = 0.$$

c.q.d.

<u>Lema 2.15</u> - Se H, dado por (1.3), é uma imersão isométrica de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, então $A_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ ($\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ é permutação de 2oo) é ortogonal a $A_{(s-2)\beta_2\beta_3\beta_4}$ ($\beta_2\beta_3\beta_4$ é permutação de 11o).

<u>Prova:</u> Considere (2.10) com $(j,k) = (3,4)$ e $(j,k) = (2,4)$.

$$H_1 = sA_{s000}\, x_1^{s-1}\, x_2 - A_{(s-1)100}\, x_1^{s} - 2A_{(s-2)200}\, x_1^{s-1}\, x_2 + \phi$$

$$H_{12} = -(s-1)A_{(s-1)010}\, x_1^{s-1} x_2 + 2A_{(s-3)210}\, x_1^{s-1} x_2 + A_{(s-2)110}\, x_1^{s} + \phi$$

Coletando os termos em $x_1^{2s-1}\, x_2$ de $H_1\, H_{12}$, obtemos

$$A_{(s-1)100}\, A_{(s-3)210} + A_{(s-2)200}\, A_{(s-2)110} = 0.$$

Por outro lado,

$$H_2 = -A_{(s-1)010}\, x_1^{s} - A_{(s-2)110}\, x_1^{s-1} x_2 - A_{(s-3)210}\, x_1^{s-2}\, x_2^2 + \phi$$

Coletando os termos em $x_1^{2s-2}\, x_2^2$ em $H_1\, H_2$, e usando os Lema 2.12 e Lema 2.13, temos

$$3A_{(s-1)010}A_{(s-3)300} + 2A_{(s-2)200}A_{(s-2)110} + A_{(s-1)100}A_{(s-3)210} = 0.$$

Em (2.8), considere

$$B_{(s-3)100} = 0$$

$$B_{(s-3)010} = 0$$

$$B_{(s-2)000} = 0.$$

Multiplicando essas igualdades por $A_{(s-1)010}$, $A_{(s-1)100}$ e $A_{(s-2)110}$, obtemos

$$A_{(s-1)010}A_{(s-3)120} + A_{(s-1)010}A_{(s-3)102} + 3A_{(s-3)300}A_{(s-1)010} = 0$$

$$A_{(s-1)100}A_{(s-3)210} + A_{(s-1)100}A_{(s-3)012} + 3A_{(s-3)030}A_{(s-1)100} = 0$$

$$A_{(s-2)110}A_{(s-2)200} + A_{(s-2)110}A_{(s-2)020} + A_{(s-2)110}A_{(s-2)002} = 0.$$

Com essas igualdades e as duas outras deduzidas no início deste Lema (com permutas convenientes de índices), obtemos

$$A_{(s-2)2oo}\ A_{(s-2)11o} = 0.$$

Analogamente,

$$A_{(s-2)o2o}\ A_{(s-2)11o} = 0.$$

Multiplicando (2.8) por $A_{(s-2)11o}$, e usando o Lema 2.12, obtemos

$$A_{(s-2)oo2}\ A_{(s-2)11o} = 0.$$

As demais relações saem analogamente.

c.q.d.

<u>Lema 2.16</u> - Se H, dado por (1.3), é uma imersão isométrica mínima, então os vetores $A_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ com $\alpha_i = \alpha_j = 1$, $\alpha_k = 0$ (i, j, k distintos) são ortogonais.

<u>Prova</u>: Considere em $S^3(a)$ os caminhos $\alpha(u_1)$ e $\beta(u_2)$ tais que

$$\alpha'(u_1) = (x_3, x_4, -x_1, -x_2)$$
$$\beta'(u_2) = (x_4, x_3, -x_2, -x_1).$$

Derivando (1.3), temos

$$H_1 = -A_{(s-1)o2o}\ x_1^s - A_{(s-2)11o}\ x_1^{s-1}\ x_2 - A_{(s-3)21o}\ x_1^{s-2}\ x_2^2 + \phi$$
$$H_2 = -A_{(s-1)oo1}\ x_1^s - A_{(s-2)1o1}\ x_1^{s-1}\ x_2 - A_{(s-3)2o1}\ x_1^{s-2}\ x_2^2 + \phi.$$

Coletando os termos em $x_1^{2s-2}\ x_2^2$ de $H_1\ H_2$, usando (2.11) com $B_{(s-3)olo} = 0$ e o Lema 2.15, obtemos

$$A_{(s-2)11o}\ A_{(s-2)1o1} = 0.$$

As demais relações são análogas.

c.q.d.

Lema 2.17 - Seja H, como em (1.3), uma imersão isométrica mínima. Se um dos vetores $A_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$, com $\alpha_i = \alpha_j = 1$, $\alpha_k = 0$ (i,j,k distintos) é nulo, os dois outros também o são.

Prova: Suponha $A_{(s-2)11o} = 0$. De (2.18), segue que o produto $A_{(s-1)1oo}\, A_{(s-3)12o}$ toma seu valor máximo $\frac{s-1}{a^{2s-1}}$. Decorre, usando (2.25), que $A_{(s-2)2oo}\, A_{(s-2)o2o}$ tem seu valor mínimo $-\frac{s^2(s-1)}{6a^{2s}}$. Do Lema 2.4 e de (2.6), segue que esse mínimo ocorre quando as normas de $A_{(s-2)2oo}$, $A_{(s-2)o2o}$ e o ângulo desses vetores são máximos. Usando (2.25), segue que

$$A^2_{(s-2)2oo} = A^2_{(s-2)o2o} = \frac{s(s-1)(s^2+3s+4)}{12a^{2s}} .$$

Finalmente, de (2.24) obtemos

$$A_{(s-2)1o1} = A_{(s-2)oo1} = 0.$$

c.q.d.

Secção 3 - Estimativas das dimensões de alguns subespaços

Nas Definição 1.1 e Definição 1.3, definimos os espaços vetoriais $V(H)$ e $V_i(H)$, $i=1,\ldots,8$. O objetivo desta secção é determinar estimativas para as dimensões dos $V_i(H)$. Tais estimativas serão usadas na Secção 4 a fim de provar o Lema 4.1, que dá uma cota inferior para a dimensão de $V(H)$.

O ponto importante da presente secção é a Proposição 3.2. Nessa proposição, exibimos um sistema de coordenadas locais que permite determinar a norma da 2ª forma fundamental quando impomos condições a certos subespaços de $V(H)$. Esse fato é usado nas Proposição 3.3, Proposição 3.4 e Proposição 3.5.

Inicialmente fixamos uma notação para os espaços $V_i(H)$ e escolhemos alguns subespaços dos $V_i(H)$, como segue.

Se $A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \in V_j(H)$, (veja (1.4)), indicaremos $V_j(H)$ com a notação $V_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$.

Considere os subconjuntos de vetores de E^{N+1}; (usamos a convenção $A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = 0$ se algum $\alpha_i < 0$)

$$\{A_{sooo}, A_{(s-2)2oo}, A_{(s-2)o2o}, A_{(s-2)oo2}\} \subset V_{sooo} \tag{3.1}$$

$$\{A_{(s-1)1oo}, A_{(s-3)3oo}, A_{(s-3)12o}, A_{(s-3)1o2}\} \subset V_{(s-1)1oo} \tag{3.2}$$

$$\{A_{(s-1)o1o}, A_{(s-3)o3o}, A_{(s-3)21o}, A_{(s-3)o12}\} \subset V_{(s-1)oo1} \tag{3.3}$$

$$\{A_{(s-1)oo1}, A_{(s-3)oo3}, A_{(s-3)2o1}, A_{(s-3)o21}\} \subset V_{(s-1)oo1} \tag{3.4}$$

$$\{A_{(s-2)11o}, A_{(s-4)31o}, A_{(s-4)13o}, A_{(s-4)112}\} \subset V_{(s-2)11o} \tag{3.5}$$

$$\{A_{(s-2)1o1}, A_{(s-4)3o1}, A_{(s-4)1o3}, A_{(s-4)121}\} \subset V_{(s-2)1o1} \tag{3.6}$$

$$\{A_{(s-2)o11}, A_{(s-4)o31}, A_{(s-4)o13}, A_{(s-4)211}\} \subset V_{(s-2)oo1} \tag{3.7}$$

$$\{A_{(s-3)111}, A_{(s-5)311}, A_{(s-5)131}, A_{(s-5)113}\} \subset V_{(s-3)111} \tag{3.8}$$

Os subespaços gerados por (3.i), i = 1,...,8, serão denotados respectivamente por

$$\left.\begin{array}{l} T_{sooo},\ T_{(s-1)1oo},\ T_{(s-1)o1o},\ T_{(s-1)oo1}, \\ T_{(s-2)11o},\ T_{(s-2)1o1},\ T_{(s-2)o11}\ \text{e}\ T_{(s-3)111} \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

(Quando $s=1$ ou 2, apenas os 4 ou 7 primeiros subespaços, respectivamente, são considerados).

Provaremos agora o Lema 3.1 que será usado na Proposição 3.3, e, em seguida, provaremos as Prop. 3.1, Prop. 3.2, Prop. 3.3, Prop. 3.4 e Prop. 3.5.

<u>Lema 3.1</u> - Seja H, dado por (1.3), uma imersão isométrica mínima de $S^3(a)$ em $S^N(1)$. Se $\dim T_{sooo} = 1$ então valem as seguintes relações

$$A^2_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \frac{s^2(s-1)^2}{36a^{2s}}, \qquad (3.10)$$

onde
$$\sum_{i=2}^{4} \alpha_i = 2$$

e
$$\alpha_i = 2, \quad i=2,3,4;$$

$$A_{(s-1)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \; A_{(s-3)\beta_2\beta_3\beta_4} = -\frac{s(s-1)(s+2)(s-6)}{54a^{2s}}, \qquad (3.11)$$

onde
$$\sum_{i=2}^{4} \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=2}^{4} \beta_i = 3,$$

$$\alpha_i = 1 \quad e \quad \beta_i = 3, \quad i=2,3,4;$$

$$A_{(s-1)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \; A_{(s-3)\beta_2\beta_3\beta_4} = \frac{s^2(s-1)(s+2)}{18a^{2s}}, \qquad (3.12)$$

onde
$$\sum_{i=2}^{4} \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=2}^{4} \beta_i = 3,$$

$$\alpha_i = 1, \; \beta_i = 1, \; \beta_j = 2, \; \beta_k = 0$$

i, j, k distintos;

$$A_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \frac{s(s-1)(s+2)(s-3)}{9a^{2s}} \qquad (3.13)$$

onde $\alpha_i = \alpha_j = 1,\ \alpha_k = 0$

i, j, k distintos

Prova: Em face de (2.17), segue que

$$A_{(s-2)200} = A_{(s-2)020} = A_{(s-2)002}.$$

Essas igualdades juntamente com (2.6), dão

$$A_{(s-2)200} = -\frac{s(s-1)}{6} A_{s000}.$$

Usando (2.1), obtém-se (3.10).

(2.21) com (3.10) implicam (3.11).

(2.18), (2.22) e $a^2 = \frac{s(s+2)}{3}$ ([1]), implicam

(3.12) e (3.13).

c.q.d.

Proposição 3.1 - Seja H, dado por (1.3), uma imersão isométrica mínima de $S^3(a)$ em $S^N(1)$. Sejam os subespaços T_{s000}, $T_{(s-1)100}$, $T_{(s-1)010}$ e $T_{(s-1)001}$, definidos em (3.9). Então as dimensões desses subespaços são 1, 2 ou 3.

Prova: De (2.1) e (2.9), segue que esses subespaços são não triviais. Por outro lado, em face do Lema 2.2, cada um dos subconjuntos (3,i), $i = 1,2,3,4$, é formado por vetores linearmente dependentes.

Proposição 3.2 - Seja $H(x_1,\ldots,x_4) = \sum\limits_{\Sigma\alpha_i=s} A_{\alpha_1\ldots\alpha_4} x_1^{\alpha_1}\ldots x_4^{\alpha_4}$, onde os vetores $A_{\alpha_1\ldots\alpha_4}$ estão definidos em (1.4), uma imersão isométrica mínima $H: S^3(a) \subset E^4 \to S^N(1) \subset$ $\subset E^{N+1}$. Existe um sistema de coordenadas (u_1, u_2, u_3) em vizinhança de $H(a,0,0,0)$ tal que o vetor posição H, os vetores H_1, H_2 e H_3, tangentes a $H(S^3(a))$, e os vetores H_{ij} $(1 \leq i,\ j \leq 3)$, satisfazem as relações abaixo (os índices em H indicam derivações em relação aos parâmetros u_1, u_2, u_3).

$$H(a,0,0,0) = a^s A_{sooo}$$
$$H_1(a,0,0,0) = -a^s A_{(s-1)1oo}$$
$$H_2(a,0,0,0) = a^{s+1} A_{(s-1)o1o}$$
$$H_3(a,0,0,0) = a^{s+1} A_{(s-1)oo1}$$
$$H_{12}(a,0,0,0) = -a^{s+1} A_{(s-2)11o}$$
$$H_{13}(a,0,0,0) = -a^{s+1} A_{(s-2)1o1}$$
$$H_{23}(a,0,0,0) = a^{s+2} A_{(s-2)o11}$$
$$H_{11}(a,0,0,0) = a^s (2A_{(s-2)2oo} - A_{sooo})$$
$$H_{22}(a,0,0,0) = a^{s+2}(2A_{(s-2)o2o} - A_{sooo})$$
$$H_{33}(a,0,0,0) = a^{s+2}(2A_{(s-2)oo2} - A_{sooo}).$$

<u>Prova</u>: Seja em $S^3(a) \subset E^4$ o sistema de coordenadas cujas curvas coordenadas $\alpha(u_1)$, $\beta(u_2)$ e $\gamma(u_3)$ tenham os seguintes vetores tangentes

$$\alpha'(u_1) = (x_2, -x_1, 0, 0)$$
$$\beta'(u_2) = (-x_1x_3, -x_2x_3, x_1^2+x_2^2, 0)$$
$$\gamma'(u_3) = (-x_1x_4, -x_2x_4, -x_3x_4, x_1^2+x_2^2+x_3^2).$$

Pela isometria H, essas curvas são levadas em curvas $H(\alpha(u_1))$, $H(\beta(u_2))$ e $H(\gamma(u_3))$ em $H(S^3(a)) \subset S^N(1)$.

Derivando H, dado por (1.3), em relação a u_1, u_2 e u_3, obtemos (nas expressões abaixo, ϕ indica termos irrelevantes).

$$H = A_{sooo}\, x_1^s + \phi$$

$$H_1 = -A_{(s-1)1oo}\, x_1^s + \phi$$

$$H_2 = A_{(s-1)o1o}\, x_1^{s+1} + \phi$$

$$H_3 = A_{(s-1)oo1}\, x_1^{s+1} + \phi$$

$$H_{12} = -A_{(s-2)11o}\, x_1^{s+1} + \phi$$

$$H_{13} = -A_{(s-2)1o1}\, x_1^{s+1} + \phi$$

$$H_{23} = A_{(s-2)o11}\, x_1^{s+2} + \phi$$

$$H_{11} = (-sA_{sooo} + 2A_{(s-2)2oo})x_1^s + \phi$$

$$H_{22} = (-sA_{sooo} + 2A_{(s-2)o2o})x_1^s + \phi$$

$$H_{33} = (-sA_{soo} + 2A_{(s-2)oo2})x_1^{s+2} + \phi .$$

Nas 10 igualdades acima, fazendo $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (a,0,0,0)$, e observando que os vários ϕ (que são distintos) se anulam, obtemos as igualdades que queremos provar.

c.q.d.

<u>Proposição 3.3</u> - Seja H uma imersão isométrica mínima de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, tal que a dimensão de T_{sooo} seja 1 (T_{sooo} está definido em (3.9)). Então $s = 1$.

<u>Prova</u>: Sejam $p = (a,0,0,0) \in S^3(a)$ e $q = H(p)$. Sejam em q os seguintes espaços: $T_q(H(S^3(a)))$, o espaço tangente a $H(S^3(a)) \subset E^{N+1}$; $N_q(H(S^3(a)))$, o espaço normal a

$H(S^3(a))$ em $S^N(1) \subset E^{N+1}$.

Considere em vizinhança de q o sistema de coordenadas dado pela Proposição 3.2. Seja, em q, o referencial (e_i), $0 \leq i \leq N$, tal que

$$e_o = |A_{sooo}|^{-1} A_{sooo}, \quad e_1 = |A_{(s-1)1oo}|^{-1} A_{(s-1)1oo},$$

$$e_2 = |A_{(s-1)o1o}|^{-1} A_{(s-1)o1o}, \quad e_3 = |A_{(s-1)oo1}|^{-1} A_{(s-1)oo1},$$

$$e_4 = |A_{(s-2)11o}|^{-1} A_{(s-2)11o}, \quad e_5 = |A_{(s-2)1o1}|^{-1} A_{(s-2)1o1},$$

$e_6 = |A_{(s-2)o11}|^{-1} A_{(s-2)o11}$. Essa escolha é possível em face da Proposição 3.2, de (2.1), (2.9) e dos Lemas 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16.

Tal escolha é feita de modo que e_o é normal a $S^N(1) \subset E^{N+1}$, $e_1, e_2, e_3 \in T_q(H(S^3(a)))$, e, para $i \geq 4$, $e_i \in N_q(H(S^3(a)))$.

Por um lado, a imersão isométrica H tem curvatura seccional constante

$$k(s) = \frac{3}{s(s+2)}. \qquad \text{(V. Secção 0)} \qquad (3.14)$$

Por outro lado, no sistema de coordenadas escolhido, usando (3.13), obtemos o quadrado S da norma da 2ª forma fundamental

$$S = \frac{2s(s-1)(s+2)(s+3)}{3a^{2s}} \qquad (3.15)$$

Usando (3.14) e (3.15) na fórmula de Gauss, obtemos

$$3\left(\frac{s(s+2)}{3}\right)^s \left(1 - \frac{3}{s(s+2)}\right) = 2s(s-1)(s+2)(s+3) \qquad (3.16)$$

O único valor inteiro que verifica (3.16) é $s = 1$.

c.q.d.

<u>Proposição 3.4</u> - Seja H, como em (1.3), uma imersão isométrica mínima de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, tal que $\dim T_{sooo} = 2$. Então $1 \leq s \leq 3$.

<u>Prova</u>: Usamos o mesmo argumento da Proposição 3.3, sendo que, neste caso,

$$S = 36 \Sigma A^2_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} + 2 \Sigma A^2_{(s-2)\beta_2\beta_3\beta_4} - \frac{3s^2(s-1)^2}{a^{2s}},$$

onde $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ percorre as permutações de 200 e $\beta_2\beta_3\beta_4$, as permutações de 110.

Usando a fórmula de Gauss, obtemos

$$36 \Sigma A^2_{(s-2)\alpha_2\alpha_3\alpha_4} + 2 \Sigma A^2_{(s-2)\beta_2\beta_3\beta_4} = \frac{(s+3)(s-1)}{s(s+2)} + \frac{3s^2(s-1)^2}{a^{2s}}.$$

Usando (2.24), obtemos

$$16 \Sigma A^2_{(s-2)\beta_2\beta_3\beta_4} = \frac{6s(s-1)(s^2+5s+6)}{a^{2s}} - \frac{(s-1)(s+3)}{s(s+2)} \qquad (3.17)$$

A condição do 2º membro de (2.17) ser ≥ 0, conclui a prova.

c.q.d.

<u>Proposição 3.5</u> - Seja H, como em (1.3), uma imersão isométrica mínima de $S^3(a)$ em $S^N(1)$, tal que $A_{(s-2)110}$, $A_{(s-2)101}$ e $A_{(s-2)001}$ sejam nulos. Então $s = 1$.

<u>Prova</u>: Os três vetores nulos, dados na hipótese, implicam juntamente com (2.24) que os vetores $A_{(s-2)200}$, $A_{(s-2)020}$, $A_{(s-2)002}$ têm a mesma norma. Em face de (2.17), os produtos destes últimos vetores por A_{sooo} são iguais. Por outro lado, por causa de (2.18) e (2.23), esses mesmos três vetores têm

produtos iguais entre si. Assim sendo, as componentes de $A_{(s-2)2oo}$, $A_{(s-2)o2o}$ e $A_{(s-2)oo2}$ segundo o complemento ortogonal do subespaço gerado por A_{sooo}, formam entre si ângulos iguais. Tais componentes, em face de (2,17) são dadas por

$$\omega_1 = 6A_{(s-2)2oo} + s(s-1)A_{sooo}$$

$$\omega_2 = 6A_{(s-2)o2o} + s(s-1)A_{sooo}$$

$$\omega_3 = 6A_{(s-2)oo2} + s(s-1)A_{sooo}.$$

Usando o mesmo argumento da Proposição 3.3, obtemos neste caso

$$S = 3\omega_1^2.$$

Usando a fórmula de Gauss,

$$12a^{2s}\left(1 - \frac{3}{s(s+2)}\right) = s(s-1)(s^2+3s+4),$$

cuja única raiz inteira é $s = 1$.

c.q.d.

Secção 4 - Prova do Teorema

Em Definição 1.1, na Secção 1, definimos o subespaço $V(H) \subset E^{N+1}$. Nesta secção, provaremos que $\dim V(H) \geq 9$, desde que a aplicação $H: S^3(a) \subset E^4 \to S^N(1) \subset E^{N+1}$, à qual $V(H)$ está associado, seja uma imersão isométrica mínima não totalmente geodésica. Isso constitui o Lema 4.1, do qual o Teorema decorrerá imediatamente. A prova de Lema 4.1 usa o subespaço $T_{sooo} \subset V_{sooo}$, definido em (3.9), e o fato (dado pela Proposição 3.1) que $1 \leq \dim T_{sooo} \leq 3$. Inicialmente, usando as Proposição 3.3 e Proposição 3.4, excluem-se as possibilidades $\dim T_{sooo} = 1$ e $\dim T_{sooo} = 2$. Quando $\dim T_{sooo} = 3$, exibem-se nove subespaços unidimensionais independentes em $V(H)$, o que concluirá a prova.

<u>Lema 4.1</u> - Seja $H: S^3(s) \subset E^4 \to S^N(1) \subset E^{N+1}$ uma imersão isométrica mínima não totalmente geodésica. Então o espaço $V(H)$, associado a H na Definição 1.1, tem dimensão maior que 8.

<u>Prova</u>: O subespaço T_{sooo}, definido em (3.9), está contido em $V(H)$. Pela Proposição 3.1, temos $1 \leq \dim T_{sooo} \leq 3$.

Suponha, inicialmente, que $\dim T_{sooo} = 1$. Pela Proposição 3.3, temos $s = 1$, o que está excluido pois H é não totalmente geodésica.

Suponha, em 2º lugar, que $\dim T_{sooo} = 2$. Pela Proposição 3.4, temos $s = 1,2,3$. O argumento anterior exclui $s = 1$. Se $s = 2$ ou 3, usando [4], pg. 44, 1.4 Theorem, temos $N = 8$ ou 15, respectivamente. Então $\dim V(H) \geq 9$.

Finalmente, suponha que $\dim T_{sooo} = 3$. Considere os subespaços $T_{(s-1)1oo}$, $T_{(s-1)o1o}$, $T_{(s-1)oo1}$, $T_{(s-2)11o}$, $T_{(s-2)1o1}$ e $T_{(s-2)oo1}$, definidos em (3.9), os quais estão contidos em $V(H)$. Pela Proposição 3.1, os três primeiros têm dimensão compreendida entre 1 e 3. Como H é não totalmente geodésica, $s \neq 1$; daí, tendo em vista a Proposição 3.5 e o Lema 2.17, e como $A_{(s-2)11o} \in T_{(s-2)11o}$, $A_{(s-2)1o1} \in$

$\in T_{(s-1)1o1}$ e $A_{(s-2)o11} \in T_{(s-2)oo1}$, conclui-se que os 3 últimos subespaços $T_{(s-2)11o}$, $T_{(s-2)1o1}$ e $T_{(s-2)o11}$ têm dimensão maior ou igual a 1. Por outro lado, como $\dim T_{sooo} = 3$, então 3 dos geradores de T_{sooo} são linearmente independentes. Considere o conjunto formado por 3 de tais geradores e pelos seis vetores $A_{(s-1)1oo} \in T_{(s-1)1oo}$, $A_{(s-1)o1o} \in T_{(s-1)o1o}$, $A_{(s-1)oo1} \in T_{(s-1)oo1}$, $A_{(s-2)11o} \in T_{(s-2)11o}$, $A_{(s-2)1o1} \in$ $\in T_{(s-2)1o1}$, $A_{(s-2)o11} \in T_{(s-2)oo1}$.

Levando em conta os Lemas 2.11, 2.12, 2.13, 2.15 e 2.16, segue esses vetores são independentes. Portanto

$$\dim V(H) \geq \dim(T_{sooo} \cup T_{(s-1)1oo} \cup T_{(s-1)o1o} \cup T_{(s-1)oo1} \cup T_{(s-2)11o} \cup T_{(s-2)1o1} \cup T_{(s-2)o11}) \geq 9.$$

c.q.d.

<u>Prova do Teorema</u>: De (1.4) e Definição 1.1, segue que $\dim V(H) \leq N + 1$. Usando o Lema 4.1, temos finalmente $N \geq 8$.

c.q.d.

REFERÊNCIAS

[1] - Chern, S.S. - Minimal submanifolds in a Riemannian manifold, University of Kansas, Dept. of Math. Technical Report 19 (New Series), 1968.

[2] - Chern, S.S. - Brief Survey of Minimal Submanifold I, Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach - Band 4 - 1971.

[3] - do Carmo, M.P. - Brief Survey of Minimal Submanifold II, idem.

[4] - do Carmo, M.P. e Wallach, N.R. - Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. of Math. 93 (1971), 43-62.